PD wykład 2

Użycie zmiennych binarnych:

a) Modelowanie decyzji tak/nie
b) Modelowanie zależnych decyzji
c) Wybór elementu ze zbioru
d) Modelowanie rozłącznych alternatyw
e) Modelowanie zbiorów wartości
f) Sprowadzanie IP do BIP
g) Linearyzacja problemów binarnych i innych
h) inne

Użycie zmiennych binarnych:

a) Modelowanie decyzji tak/nie

Zagadnienie załadunku (Knapsack Problem)

Które spośród n ładunków ważących odpowiednio $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o wartościach $c_1, c_2, \ldots, c_n$ należy załadować na samochód o dopuszczalnej ładowności b tak, aby łączna wartość załadowanych ładunków była jak największa?

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

$x_j = 1$ (tak)

$x_j = 0$ (nie)

Użycie zmiennych binarnych:

b) Modelowanie zależnych decyzji

Uncapacitated Lot-Sizing (ULS): Zadaniem jest przyjąć optymalny (minimalizujący koszty) plan produkcyjny dla jednego produktu w *n*-okresowym horyzoncie czasowym. Mamy

dane

f_t – koszt stały produkcji w czasie *t*,

p_t – jednostkowy koszt produkcji w czasie *t*,

h_t – jednostkowy koszt magazynowania w okresie *t*,

d_t – zapotrzebowanie w okresie *t,*

zmienne

x_t – wielkość produkcji w okresie *t*,

s_t – zapas na końcu okresu *t*,

y_t = 1 jeśli produkt jest wytwarzany w okresie *t*,
y_t = 0 w przeciwnym wypadku.

I teraz ograniczenie $x_t \leq y_t \cdot \sum_{j=1}^{n} d_j$ oznacza, że wielkość produkcja jest równa 0, jeśli zakładamy, że produkt nie jest wytwarzany w danym okresie.

Użycie zmiennych binarnych:

c) Wybór elementu ze zbioru

$$x \in \{a_1, \dots, a_k\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x = a_1 y_1 + \cdots + a_k y_k \\ y_1 + \cdots + y_k = 1 \\ y_i \in \{0,1\} \end{array}$$

Użycie zmiennych binarnych

d) Modelowanie rozłącznych alternatyw

Alternatywy ograniczeń (Discrete Alternatives or Disjunctions)

Dwie prace muszą być wykonane na tej samej maszynie, ale nie w tym samym czasie. Niech p_i oznacza czas trwania procesu, a zmienne t_i czas rozpoczęcia procesu *i*. Wtedy albo praca 1 poprzedza pracę 2 ($t_2 \geq t_1 + p_1$) albo na odwrót ($t_1 \geq t_2 + p_2$).

$$
\begin{gathered}
t_2 - t_1 \geq p_1 y_1 - \infty \cdot y_2 \\
t_1 - t_2 \geq p_2 y_2 - \infty \cdot y_1 \\
y_1 + y_2 = 1 \\
y_1, y_2 \in \{0,1\}
\end{gathered}
$$

Użycie zmiennych binarnych

e) Modelowanie zbiorów wartości

Użycie zmiennych binarnych

f) Sprowadzanie IP do BIP

(poprzez zapisanie liczby w systemie binarnym)

Użycie zmiennych binarnych

g) Linearyzacja problemów binarnych i innych

- $x_j^p = x_j$
- $\prod_{j \in I} x_j$ zastępujemy zmienną binarną *y* oraz warunkami

$$\sum_{j \in I} x_j \leq y + |I| - 1$$

$$\sum_{j \in I} x_j \geq y \cdot |I|$$

Użycie zmiennych binarnych

h) inne

Zagadnienie komiwojażera (Traveling Salesman Problem – ATSP) – przypadek niesymetryczny

Komiwojażer startując z miasta 1 ma odwiedzić n – 1 miast i wrócić do punktu startu. Niech c_{ij} będzie odległością miasta i od miasta j. W jakiej kolejności powinien odwiedzić te miasta, aby przebyta droga była jak najkrótsza?

min: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$ (minimalizacja długości)

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1, \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} x_{ij} = 1, \quad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n$$

(każde miasto odwiedzamy dokładnie 1 raz)

$$u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1, \quad \text{for } i, j = 2, 3, \ldots, n;\ i \neq j$$
$$2 \leq u_i \leq n, \quad \text{for } i = 2, 3, \ldots, n$$

(eliminacja krótkich cykli)