# PD – wykład 3

**Przykład problemu nieliniowego - zagadnienie rozmieszczenia**

Wydziały $W_1$, …, $W_n$ chcemy rozmieścić w lokalizacjach $L_1$, …, $L_n$ tak, żeby łączne koszty transportu wewnątrzzakładowego (np. liczone w skali roku) były jak najmniejsze i żeby każdy wydział był zlokalizowany w jednej i tylko w jednej lokalizacji. Niech $d_{ik}$ będzie jednostkowym kosztem transportu $L_i$ do $L_k$ i niech $q_{jl}$ będzie przewidywaną (roczną) wielkością transportu z $W_j$ do $W_l$. Zaplanować odpowiednie rozmieszczenie.

Niech $c \in \boldsymbol{R}^n, A \in \boldsymbol{R}^{m,n}, b \in \boldsymbol{R}^m$

$$(IP) \quad \max\{\, c^T x : Ax \leq b, x \geq 0, x \in \boldsymbol{Z}^n\}$$

Czy łatwo rozwiązać IP?

Większość problemów IP oraz BIP jest tzw. klasy NP, co oznacza, że prawdopodobnie nie mają one rozwiązania w czasie wielomianowym (w odniesieniu do wielkości danych).

Niech $c \in \boldsymbol{R}^n, A \in \boldsymbol{R}^{m,n}, b \in \boldsymbol{R}^m$

$$(LP) \quad \max\{ c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

Czy łatwo rozwiązać LP?

Algorytm SIMPLEX (Dantzig 1947)
1. W praktyce bardzo efektywny – średnia złożoność obliczeniowa liniowa ze względu na *m.*
2. Teoretycznie nieefektywny – złożoność wykładnicza w najgorszym przypadku (Klee-Minty 1973)

**Twierdzenie** (Chaczian 1979 – algorytm elipsoidalny)
Problem LP jest klasy P względem *n* i *m* (czyli ma efektywny = wielomianowy algorytm)

Algorytm SIMPLEX – (bardzo skrótowo)

1. Przygotowanie – wprowadzenie zmiennych sztucznych
2. Kolejne iteracje
    a) wybór zmiennej wchodzącej
    b) wybór zmiennej wychodzącej
    c) utworzenie nowego słownika

Przykład.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\to max \\ 2x_1 + 2x_2 &\leqslant 14 \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 8 \\ 4x_1 &\leqslant 16 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Def. Powłoką wypukłą zbioru $X \subseteq \boldsymbol{R}^n$ nazywamy najmniejszy w sensie inkluzji zbiór wypukły zawierający *X.* Oznaczenie to $\mathbf{conv}(X)$.

**Twierdzenie.** (!)
Niech $X \subseteq \boldsymbol{R}^n$ będzie zbiorem skończonym oraz $c \in \boldsymbol{R}^n$. Wówczas

$$\max\{c^T x : x \in X\} = \max\{c^T x : x \in \mathrm{conv}(X)\}$$

Oznaczenie.
$P(A,b) = \{x \in R^n \colon Ax \leq b, x \geq 0\}$.

Definicja. Wielościan $P \subseteq R^n$ jest ***sformułowaniem*** problemu dla zbioru $X \subseteq Z^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P \cap Z^n = X$.

Definicja. Sformułowanie $P_1$ jest ***lepsze*** od $P_2$, jeśli $P_1 \subset P_2$. Sformułowanie $P$ jest ***idealne***, jeśli $P = conv(X)$.