PD wykład 4

Twierdzenie. (!)

Niech $X \subseteq \boldsymbol{R}^n$ będzie zbiorem skończonym oraz $c \in \boldsymbol{R}^n$. Wówczas

$$\max\{c^T x : x \in X\} = \max\{c^T x : x \in \operatorname{conv}(X)\}$$

Problem maksymalnego skojarzenia w grafie

$$\max \sum_{e \in E} x_e$$

$$\sum_{e \supset v} x_e \leq 1, \qquad v \in V$$

$$x_e \in \{0,1\}$$

$$X = \left\{ \left(x_1, \dots, x_{|E|} \right) \middle| \sum_{e \supset v} x_e \leq 1, \;\; v \in V \quad oraz \quad x_e \in \{0,1\}, \; e \in E \right\}$$

Twierdzenie (Edmonds 1965)

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem zwykłym. Powłoka wypukła wektorów charakterystycznych wszystkich skojarzeń grafu jest opisana następującymi nierównościami

$$\begin{cases} 0 \leq x_e \leq 1 & e \in E \\ \sum_{e \supset v} x_e \leq 1 & v \in V \\ \sum_{e \subset U} x_e \leq \frac{|U| - 1}{2} & U \subset V, |U| \equiv 1 \ mod\ 2 \end{cases}$$

Generowanie dodatkowych ograniczeń (poprawianie sformułowań)

Def. Nierówność $a^T x \leq b$ nazywamy **dodatkowym ograniczeniem** dla zbioru X jeśli jest spełniona dla każdego elementu $x \in X$.

Niech

$$X = \{x: \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b, x_j \in \{0,1\}, a_j \geq 0\}$$

Def. Podzbiór $C \subset \{1, \dots, n\}$ nazywamy pokryciem X, jeśli

$$\sum_{j \in C} a_j > b.$$

Obserwacja. Nierówność

$$\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$$

jest dodatkowym ograniczeniem dla zbioru X.

Niech $E(C) = C \cup \{i\colon a_i \geq a_j \;\; dla\ każdego\ j \in C\}$

Obserwacja. Nierówność

$$\sum_{j \in E(C)} x_j \leq |C| - 1$$

jest dodatkowym ograniczeniem dla zbioru X.

Procedura liftingu.

Należy znaleźć maksymalne wartości α_j dla $j \in N \setminus C$, dla których

$$\sum_{i \in C} x_i + \sum_{j \in N \setminus C} \alpha_j x_j \leq |C| - 1$$

jest dodatkowym ograniczeniem.

Procedura liftingu.

Niech $j_1, \dots, j_r$ będzie uporządkowaniem $N \setminus C$.
Krok $\boldsymbol{t}$: mamy ograniczenie

$$\sum_{i \in C} x_i + \sum_{k=1}^{t-1} \alpha_{j_k} x_{j_k} \leq |C| - 1.$$

Aby obliczyć największą wartość α_{j_t}, należy rozwiązać 0-1 problem plecakowy

$$\xi_t = \max \sum_{i \in C} x_i + \sum_{k=1}^{t-1} \alpha_{j_k} x_{j_k}$$

$$\sum_{i \in C} a_i x_i + \sum_{k=1}^{t-1} a_{j_k} x_{j_k} \leq b - a_{j_t}$$

$$x \in \{0,1\}^{|C|+t-1}$$

Podstaw

$$\alpha_{j_t} = |C| - 1 - \xi_t.$$

Inne przykłady.

Niech

$$X = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in Z^n \colon \ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \right\}.$$

Wówczas

$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor a_j \rfloor x_j \leq \lfloor b \rfloor$$

jest dodatkowym ograniczeniem dla *X*.