PD wykład 5

Niech $c \in \boldsymbol{R}^n, A \in \boldsymbol{R}^{m,n}, b \in \boldsymbol{R}^m$

$$(IP) \quad \max\{ c^T x : Ax \leq b, x \geq 0, x \in \boldsymbol{Z}^n\}$$

W jakich przypadkach algorytm SIMPLEX zwróci rozwiązanie całkowitoliczbowe?

1. Jeśli sformułowanie jest idealne

2. Jeśli macierz A jest totalnie unimodularna.

Podstawy teorii problemów LP

- algorytm SIMPLEX zwraca rozwiązanie postaci

$$(x_B, x_N) = (B^{-1}b, 0)$$

gdzie B jest pewną nieosobliwą podmacierzą $n \times n$ macierzy (A, I).

Definicja. Macierz A jest totalnie ***unimodularna*** (TU) jeśli każda jej podmacierz kwadratowa ma wyznacznik równy 1, -1 lub 0.

Jak rozpoznać macierz TU?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obserwacja (ćwiczenie).
Macierz A jest TU wtedy i tylko wtedy, gdy każda z macierzy $A^T, -A, (A, A), (A, I)$ jest TU.

Twierdzenie (warunek wystarczający Hoffmana).
Macierz A jest TU jeśli zachodzą następujące trzy warunki
- $a_{ij} \in \{0, -1, 1\}$ dla wszystkich (i,j)
- każda kolumna A zawiera co najwyżej dwa elementy niezerowe
- istnieje podział (W_1, W_2) wierszy macierzy A, taki że dla każdej kolumny j, która zawiera dokładnie 2 elementy niezerowe zachodzi

$$\sum_{i \in W_1} a_{ij} - \sum_{i \in W_2} a_{ij} = 0$$

Problem przepływu o minimalnym koszcie.

Dane:

- Digraf $D = (V, E)$ (możliwe wielokrotne łuki)
- u_{ij} – przepustowość łuku (i, j)
- c_{ij} – jednostkowy koszt przepływu po łuku (i, j)
- b_i – dodatkowe wartości (źródło [source] $b_i > 0$, odpływ [sink] $b_i < 0$)

Zmienne:

- x_{ij} – wielkość przepływu po łuku (i, j).

Zachowanie przepływu

$$\underbrace{\sum_{k \in N^+(j)} x_{jk}}_{\textit{odpływy}} - \underbrace{\sum_{i \in N^-(j)} x_{ij}}_{\textit{przypływy}} = b_j \qquad j \in V$$

Macierz incydencji digrafu M_D

$$m_{v,ij} = \begin{cases} 1 & jeśli \quad v = i \\ -1 & jeśli \quad v = j \\ 0 & w\, p.p. \end{cases}$$

po wszystkich wierzchołkach $v \in V$ i łukach $ij \in E$.

Uwaga. M_D jest TU!

Problem przepływu o minimalnym koszcie:

$$\min: c^T x$$

$$M_D x = b$$ *równania zachowania przepływu*

$$Ix \leq u$$ *ograniczenie przez przepustowość*

Uwaga. $A = \binom{M_D}{I}$. Czyli A też jest TU!

Przypadki szczególne:

- Problem maksymalnego przepływu
- Zagadnienie transportowe
- Problem najkrótszej ścieżki między dwoma wierzchołkami digrafu
- Zagadnienie przydziału

Zagadnienie przydziału (Assignment Problem)

Załóżmy, że mamy wykonać n prac i że koszt przyuczenia j-tego pracownika do wykonania i-tej pracy jest równy c_{ij}. Należy znaleźć taki przydział prac dla pracowników, w którym każdy pracownik wykonuje jedną pracę i każda praca jest wykonywana przez jednego pracownika, aby łączne koszty przyuczenia były jak najmniejsze.