

PD wykład 7

Niech $c \in \mathbf{R}^n, A \in \mathbf{R}^{m,n}, b \in \mathbf{R}^m$

$$(IP) \quad z = \max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbf{Z}^n\}$$

Ograniczenia na funkcję celu

1. Ograniczenia dolne
 - poprzez każde rozwiązanie dopuszczalne (algorytmy heurystyczne)
2. Ograniczenia górne
 - dualność
 - relaksacje

Def. Dwa problemy

$$(P) z = \max\{c(x): x \in X\}$$

$$(D) w = \min\{f(y): y \in Y\}$$

tworzą **słabą parę dualną** jeśli

$$\forall x \in X, y \in Y: c(x) \leq w(y).$$

Jeśli ponadto $z = w$, to mówimy, że (P) i (D) tworzą **silną parę dualną**.

Problem (P) nazywamy prymalnym, a (D) dualnym.

Uwaga. Każde dopuszczalne rozwiązanie problemu dualnego stanowi ograniczenie górne dla funkcji celu problemu prymalnego.

Przykład.

$$(P) \quad z = \max_{M \subseteq E(G)} \{|M| : M \text{ jest skojarzeniem w } G\}$$

$$(D) \quad w = \min_{R \subseteq V(G)} \{|R| : R \text{ jest wierzchołkowym pokryciem w } G\}$$

Twierdzenie o dualności.

Niech $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $c \in R^n$. Niech $P = \{x: Ax \leq b, x \geq 0\}$, $Q = \{y: A^T y \geq c, y \geq 0\}$.

Wówczas

$$\text{a) } x \in P, y \in Q \Rightarrow c^T x \leq b^T y \quad (\text{słaba dualność})$$

$$\text{b) } P \neq \emptyset, Q \neq \emptyset \Rightarrow \max\{c^T x: x \in P\} = \min\{b^T y: y \in Q\} \quad (\text{silna dualność})$$

Wniosek. Problemy programowania liniowego

$$(P) \quad z = \max\{c^T x: Ax \leq b, x \geq 0\}$$

oraz

$$(D) \quad w = \min\{b^T y: A^T y \geq c, y \geq 0\}$$

tworzą silną parę dualną.

Twierdzenie o dualności.

Niech $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $c \in R^n$. Niech $P = \{x: Ax \leq b, x \geq 0\}$, $Q = \{y: A^T y \geq c, y \geq 0\}$.

Wówczas

$$\text{a) } x \in P, y \in Q \Rightarrow c^T x \leq b^T y \quad (\text{słaba dualność})$$

$$\text{b) } P \neq \emptyset, Q \neq \emptyset \Rightarrow \max\{c^T x: x \in P\} = \min\{b^T y: y \in Q\} \quad (\text{silna dualność})$$

Wniosek! Problem całkowitoliczbowy

$$(IP) \quad z = \max\{c^T x: Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbf{Z}^n\}$$

oraz problem liniowy

$$(LP) \quad w = \min\{b^T y: A^T y \geq c, y \geq 0\}$$

tworzą słabą parę dualną. Czyli

$$z \leq w.$$