

PD wykład 8

Programowanie dynamiczne.

1. Problem najkrótszej ścieżki.

a) digraf acykliczny $D(V, A)$

Niech $d(u, v)$ oznacza długość najkrótszej ścieżki z u do v . Wówczas

$$d(s, v) = \min_{i \in N^-(v)} \{d(s, i) + d(i, v)\}. \quad (*)$$

Uwaga. Algorytm oparty na formule (*) ma złożoność $O(|A|)$

Programowanie dynamiczne.

1. Problem najkrótszej ścieżki.

b) digraf ogólny $D(V, A)$

Niech $D_k(u, v)$ oznacza długość najkrótszej ścieżki z u do v , zawierającą co najwyżej k łuków.

$$D_k(s, v) = \min \left\{ D_{k-1}(s, v), \min_{i \in N^-(v)} \{ D_{k-1}(s, i) + d(i, v) \} \right\} \quad (**)$$

przy czym

$$d(s, t) = D_{n-1}(s, t).$$

Uwaga. Algorytm oparty na formule (**) ma złożoność $O(|V| \cdot |A|)$

2. Problem plecakowy

$$\begin{aligned} z &= \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j &\leq b \\ x_j &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

Definiujemy problem pomocniczy

$$(P_r(\lambda)) \quad f_r(\lambda) = \max \sum_{j=1}^r c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^r a_j x_j \leq \lambda$$
$$x_j \in \{0,1\}$$

I teraz

$$f_r(\lambda) = \begin{cases} \max\{f_{r-1}(\lambda), c_r + f_{r-1}(\lambda - a_r)\} \\ f_{r-1}(\lambda) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{jeśli } \lambda - a_r \geq 0, \\ & \text{jeśli } \lambda - a_r < 0 \end{aligned} \quad (***)$$

przy czym $f_0(\lambda) = 0$ oraz $z = f_n(b)$.

Dla $a_i \in Z, b \in Z$ formuła (***) prowadzi do algorytmu o złożoności $O(nb)$.

Ponadto, definiując problem następujący

$$\begin{aligned} z_H = \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n \left\lfloor \frac{a_j}{q} \right\rfloor x_j & \leq \left\lfloor \frac{b}{q} \right\rfloor \\ x_j & \in \{0,1\} \end{aligned}$$

otrzymamy algorytm o złożoności $O\left(\frac{n^3}{\epsilon}\right)$ zwracający dopuszczalne rozwiązanie oryginalnego problemu plecakowego spełniające $\frac{z_H}{z} \geq 1 - \epsilon$, (q dobiera się odpowiednio do założonego ϵ).