

Procedura Chvatala-Gomory'ego (C-G)

Niech $X = P \cap \mathbb{Z}^n$, $P = \{x \in R_+^m : Ax \leq b\}$, A jest macierzą o kolumnach $A_1, A_2, \dots, A_n$ oraz $u \in R_+^m$.

$$\sum_{j=1}^n uA_j x_j \leq ub$$

jest dodatkowym ograniczeniem

$$\sum_{j=1}^n \lfloor uA_j \rfloor x_j \leq ub$$

jest dodatkowym ograniczeniem

$$\sum_{j=1}^n \lfloor uA_j \rfloor x_j \leq \lfloor ub \rfloor$$

jest dodatkowym ograniczeniem

Twierdzenie.

Każde dodatkowe ograniczenie dla X może być otrzymane za pomocą procedury C-G zastosowanej skończoną liczbę razy.

Algorytm odcięć Gomory'ego.

Iteracja i : (i -ty słownik sympleksowy)

$$\max: z = z_0^{(i)} + \sum_{j \in N^{(i)}} c_j^{(i)} x_j$$

$$x_u^{(i)} + \sum_{j \in N^{(i)}} a_{u,j}^{(i)} x_j = b_u^{(i)}, \quad u \in B^{(i)}$$

Jeżeli wszystkie $b_u^{(i)}$ są całkowite – zakończ (rozwiązanie jest całkowite).

W przeciwnym razie, $\exists u \in B^{(i)}: b_u^{(i)} \notin \mathbb{Z}$.

Dodaj ograniczenie

$$\sum_{j \in N^{(i)}} \left(a_{u,j}^{(i)} - \lfloor a_{u,j}^{(i)} \rfloor \right) x_j \geq b_u^{(i)} - \lfloor b_u^{(i)} \rfloor \quad (*)$$

i utwórz kolejny słownik sympleksowy.

$N^{(i)}$ - zbiór zmiennych niebazowych w iteracji i

$B^{(i)}$ - zbiór zmiennych bazowych w iteracji i

Uwaga!

1. Nierówność (*) jest dodatkowym ograniczeniem, bo otrzymana po odjęciu od słownika nierówności otrzymanej procedurą C-G.
2. Odcina rozwiązanie x_u^i , bo lewa strona (*) jest równa 0 (zmienne niebazowe $x_j = 0$), a prawa strona (*) jest większa od 0.

Przykład.

$$z = 4x_1 - x_2$$

$$7x_1 - 2x_2 \leq 14$$

$$x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 3$$

Przygotowanie słownika

$$z = 4x_1 - x_2$$

$$7x_1 - 2x_2 + x_3 = 14$$

$$x_2 + x_4 = 3$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_5 = 3$$

I iteracja

$$z = \frac{59}{7} - \frac{4}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4$$

$$x_1 = \frac{20}{7} - \frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4$$

$$x_2 = 3 - x_4$$

$$x_5 = \frac{23}{7} + \frac{2}{7}x_3 - \frac{10}{7}x_4$$

I iteracja

$$z = \frac{59}{7} - \frac{4}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4$$

$$x_1 = \frac{20}{7} - \frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4$$

$$x_2 = \frac{3}{7} - x_4$$

$$x_5 = \frac{23}{7} + \frac{2}{7}x_3 - \frac{10}{7}x_4$$

$$s = \frac{-6}{7} + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4$$

(pierwsze „cięcie”)

II iteracja

$$z = \frac{15}{2}$$

$$-\frac{1}{2}x_5 - 3s$$

$$x_1 \qquad \qquad \qquad + s = 2$$

$$x_2 \qquad \qquad -\frac{1}{2}x_5 \quad + s = \frac{1}{2}$$

$$x_3 \qquad \qquad -x_5 \quad - 5s = 1$$

$$x_4 \quad + \frac{1}{2}x_5 + 6s = \frac{5}{2}$$

II iteracja

$$z = \frac{15}{2}$$

$$-\frac{1}{2}x_5 - 3s$$

$$x_1 \qquad \qquad \qquad + s = 2$$

$$x_2 \qquad \qquad -\frac{1}{2}x_5 \quad + s = \frac{1}{2}$$

$$x_3 \qquad \qquad -x_5 \quad - 5s = 1$$

$$x_4 \quad + \frac{1}{2}x_5 + 6s = \frac{5}{2}$$

$$-x_5 + 2t = -1$$

(drugie „cięcie”)

III iteracja

$$z = 7$$

$$- 3s - t$$

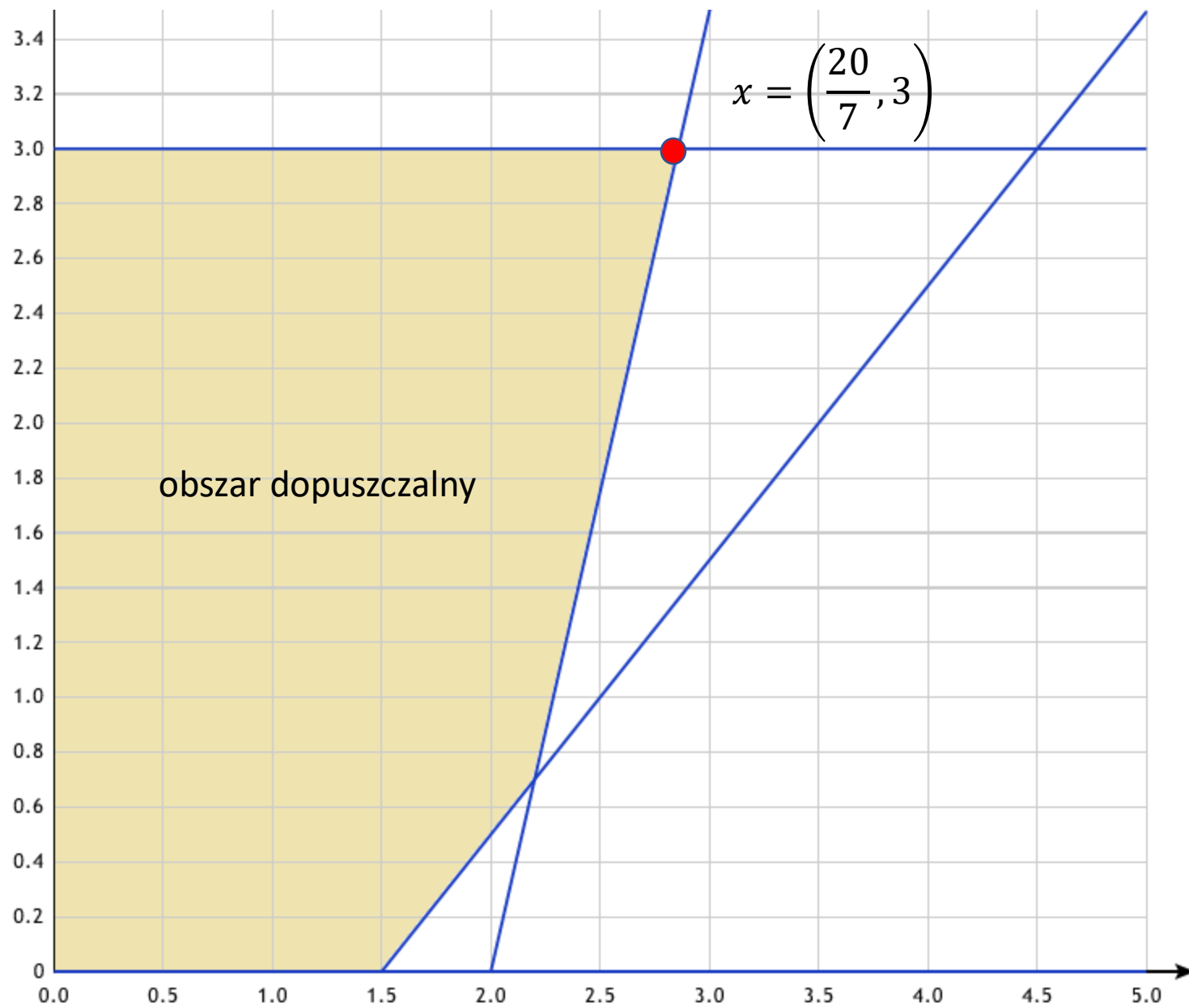
$$x_1 \qquad \qquad \qquad + s \qquad = 2$$

$$x_2 \qquad \qquad \qquad + s - t = \textcolor{red}{1}$$

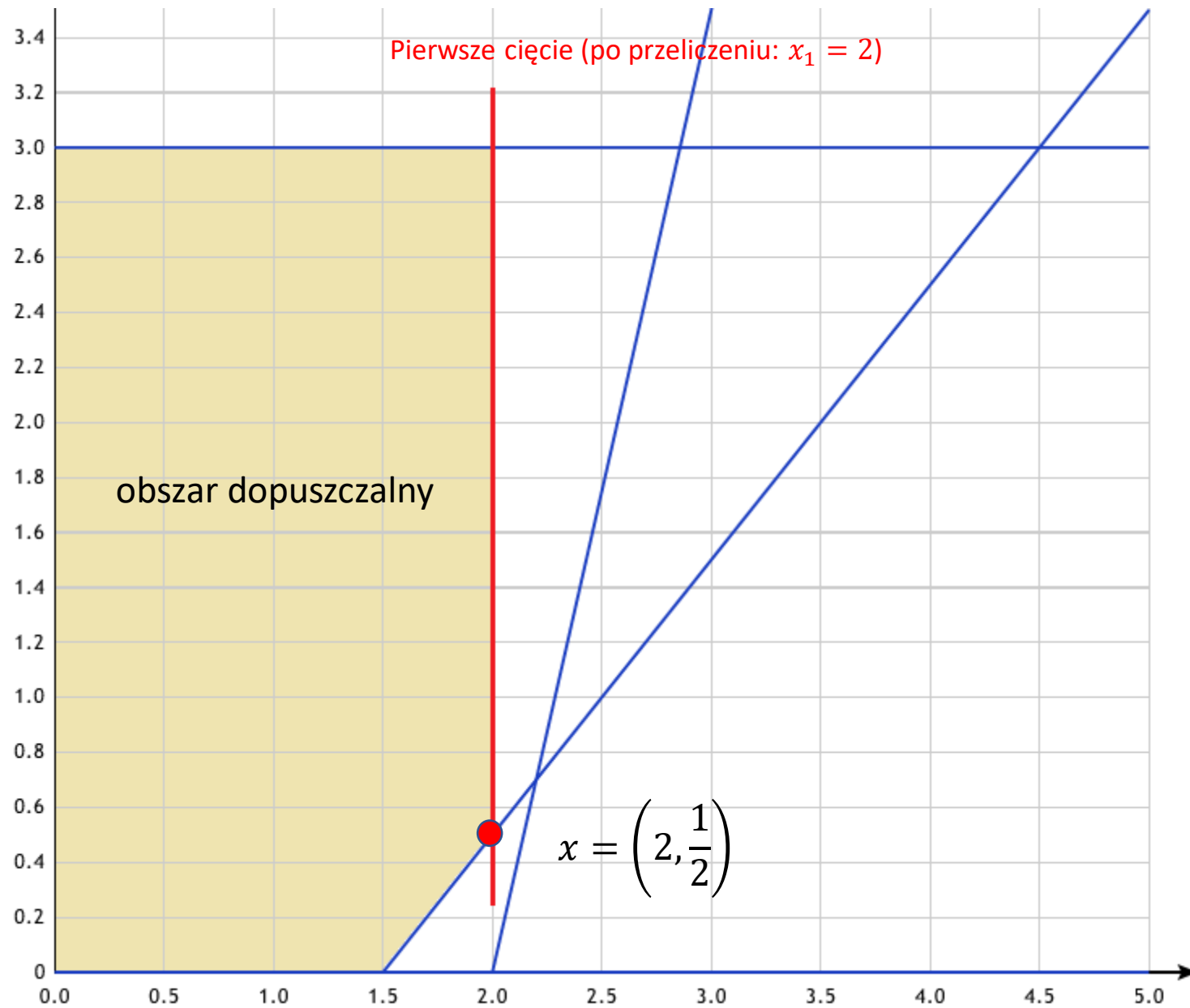
$$x_3 \qquad \qquad \qquad - 5s - 2t = 2$$

$$x_4 \qquad \qquad \qquad + 6s + t = 2$$

$$x_5 \qquad \qquad \qquad - t = 1$$



I iteracja



II iteracja

III iteracja

