Zestaw zadań – ALGEBRA LINIOWA

1. Które z podanych zbiorów są przestrzeniami wektorowymi:
a) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 3x + 2y - 8z = 0\}$,
$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = a\}$, gdzie $a \in \mathbf{R}$,
$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \geq 0\}$,
$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \cdot z = 0\}$,
b) $\{w \in \mathbf{R}[x]$: stopień w jest równy $6\}$,
$\{f : [0, 1] \to \mathbf{R} | f(1/2) = 0\}$,
$\{f : [0, 1] \to \mathbf{R} | 2f(0) = f(1)\}$?

2. Wykaż, że wektory $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (0, 1, 3)$, $v_3 = (1, 2, 0)$ tworzą bazę przestrzeni $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, \cdot)$. Znajdź współrzędne wektorów $w_1 = (5, 2, -1)$ i $w_2 = (1, 0, 0)$ względem tej bazy.

3. Dla jakiej wartości parametru m wektory (4,0,1,1), (m,3,0,1), (1,m,0,1), (3,-m,1,0) stanowią bazę przestrzeni $(\mathbf{R}^4, +, \mathbf{R}, \cdot)$?

4. Wykaż, że wektory f_1, f_2, f_3, gdzie $f_1 : x \mapsto 2$, $f_2 : x \mapsto x + 3$, $f_3 : x \mapsto 2x^2 + 1$ tworzą bazę przestrzeni $(\mathbf{R}_2[x], +, \mathbf{R}, \cdot)$. Znajdź współrzędne wektorów g_1, g_2 tże $g_1 : x \mapsto x^2 - x$, $g_2 : x \mapsto 1$ w tej bazie.

5. Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Znajdź: $A \cdot B$, $B \cdot C$.

6. Zbadaj istnienie rozwiązania równań macierzowych:

$$X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7. Sprawdź czy dane macierze są odwracalne. Jeśli tak, to znajdź macierze odwrotne:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

8. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

9. Wyznacz rzędy macierzy w zależności od parametrów a, k, l:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & a & 0 \\ 3 & a & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k & l & 1 \\ 1 & kl & 1 \\ 1 & l & k \end{bmatrix}$$

10. Rozwiąż układy metodą Gaussa:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -1 \end{cases}$$

11. Rozwiąż układy równań:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ x + y = -1 \\ 5x - y = 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 4x - 4y + 3z = 0 \\ 8x + 12y - 19z = 0 \end{cases}$$

12. Zbadaj warunki rozwiązywalności układu równań w zależności od parametru a:

$$\begin{cases} ax + (a+2)y + (a+1)z = 4a + 1 \\ (2a-2)x + 2ay + (2a-1)z = 3a + 3 \\ 2x + 4y + 3z = 2a + 5 \end{cases}$$

13. Dla jakiej wartości parametru a zbiór rozwiązań układu jest niepusty?

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ 3x + 5y = 4 \\ x + 4y = a \end{cases}$$

14. Dla jakich wartości parametrów k i l układ ma rozwiązanie niezerowe?

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ly + z = 0 \\ x + 2ly + z = 0 \end{cases}$$

15. Dla jakich wartości parametrów a i b zbiór rozwiązań układu jest jednoelementowy, nieskończony, pusty?

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = b \\ 5x - 8y + 9z = 3 \\ 2x + y + az = -1 \end{cases}$$

16. Które z podanych odwzorowań są przekształceniami liniowymi?

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 : f(x, y, z) = (2z + x, y - z, 2x + y - 3z)$$

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3 : g(x) = (x^2, 2x, -x)$$

$$h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2 : h(x, y, z) = (2x - z, y + 1)$$

17. Znajdź macierz odwzorowania liniowego

$$f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3 : f(x, y, z, t) = (x + y, x + z, x + t)$$

względem baz: $((1, 0, 0, -1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 0))$ w $\mathbf{R}^4$ i $((1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1))$ w $\mathbf{R}^3$.

18. Dane są następujące odwzorowania: $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 : f(x, y) = (y, x, x+y)$ i $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2 : g(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z)$. Wykaż, że są to przekształcenia liniowe. Znajdz Ker$f$, Imf, Ker$g$, Img oraz podaj ich bazy i wymiary. Znajdź odwzorowanie $h = g \circ f$. Czy istnieje h^{-1}? Jeśli tak, to podaj jego wzór.

19. Dane jest odwzorowanie liniowe $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ wzorem $f(x, y, z) = (x + 5y - 2z, -3x - 3y, 2x + z, 4x + 2y + z)$. Znajdź Ker$f$ i Imf.

20. Dane jest odwzorowanie liniowe $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ wzorem $f(x, y, z) = ((m-2)x + 2y - z, 2x + my + 2z, 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z)$. Wyznacz rząd odwzorowania f w zależności od parametru m.

21. Odwzorowanie liniowe $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ jest określone zależnościami: $f(1, 2) = (1, 2, 3)$, $f(2, 1) = (1, 3, 2)$. Znajdź $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$ oraz podaj ich wymiary.

22. Dane jest odwzorowanie liniowe $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ takie, że $f(1, 2) = (1, 1, 1)$, $f(0, 1) = (1, 0, 1)$. Znajdź macierz odwzorowania f względem baz: $((1, 0), (-1, 2))$ w $\mathbf{R}^2$ i $((1, 2, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1))$ w $\mathbf{R}^3$.

23. Niech $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$ będzie macierzą pewnego odwzorowania liniowego $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ względem baz $((1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 2))$ w $\mathbf{R}^3$ i $((1, 2), (0, 1))$ w $\mathbf{R}^2$. Znajdź wzór na to odwzorowanie.

24. Znajdź macierz przejścia od bazy $B_1 = ((1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1))$ do bazy $B_2 = ((2, 1, -4), (1, -2, 4)), (-1, 3, -3))$.

25. Niech $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania liniowego $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ względem baz: $B_1 = ((1, 2, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1))$ w $\mathbf{R}^3$ i $B_2 = ((1, 2), (0, 1))$ w $\mathbf{R}^2$. Znajdź $g(1, 0, 2)$. Znajdź macierz odwzorowania g względem baz: $B_1' = ((2, 4, 1), (5, 8, 5), (1, 2, 1))$ w $\mathbf{R}^3$ i $B_2' = ((1, 1), (2, 1))$ w $\mathbf{R}^2$.

26. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania liniowego f względem bazy B_1 (w dziedzinie i w przeciwdziedzinie), $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ będzie macierzą przejścia od bazy B_1 do bazy $B_2 = ((1, 2, -1), (-1, 1, -2), (1, -1, 1))$. Podaj wektory bazy B_1. Znajdź $M_f(B_2, B_2)$.

27. Dane jest odwzorowanie $\phi : \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_2[x]$ tże $\phi(w)(x) = xw'(x) + w(x)$, $w \in \mathbf{R}_2[x]$. Sprawdź czy odwzorowanie ϕ jest liniowe. Znajdź macierz odwzorowania ϕ względem bazy (w_1, w_2, w_3) w dziedzinie i w przeciwdziedzinie, gdzie $w_1(x) = 2$, $w_2(x) = x + 1$, $w_3(x) = x^2$.

28. Czy odwzorowanie liniowe $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dane wzorem $f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$ jest diagonalizowalne? Jeśli tak, to podaj bazę, w której macierz f jest diagonalna oraz podaj tę diagonalną macierz.

29. Sprawdź czy dane macierze A_i, $i = 1, 2$ są diagonalizowalne. Jeśli tak, to znajdź macierze: D diagonalną i P nieosobliwą takie, że $D = P^{-1} A_i P$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$