

**Zestaw zadań – RACHUNEK CAŁKOWY FUNKCJI JEDNEJ  
ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ**

1. Oblicz całki:

$$\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}} dx \quad \int \frac{x^2 dx}{\cos^2(2x^3 + 1)} \quad \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}} dx \quad \int \frac{\sqrt{2 + \ln|x|}}{x} dx$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}} \quad \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \quad \int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}} dx \quad \int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x} dx$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+2\cos 2x}} \quad \int \operatorname{tg}^2 x dx \quad \int |1-x^2| dx \quad \int (3x^2 - x + 2)3^x dx \quad \int \frac{\ln^2 x dx}{x^2}$$

$$\int \arccos x dx \quad \int \frac{x dx}{\cos^2 x} \quad \int e^{-2x} \sin(3x) dx \quad \int \frac{x-1}{4x^2 - 4x + 1} dx \quad \int \frac{x+1}{x^2 - x + 1} dx$$

$$\int \frac{2x^2 + 7x + 20}{x^2 + 6x + 25} dx \quad \int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2} dx \quad \int \frac{6x^3 + 4x + 1}{x^4 + x^2} dx$$

$$\int \frac{4x^3 + 9x^2 + 4x + 1}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x} dx \quad \int \frac{x^2 dx}{3\sqrt[3]{x+2}} \quad \int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{x + \sqrt[6]{x^5}} \quad \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{(8x+3)dx}{\sqrt{4x^2+3x+1}} \quad \int \sqrt{6x-x^2} dx \quad \int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx \quad \int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$\int \sin 2x \sin 5x dx \quad \int \sin 3x \cos 2x dx \quad \int \frac{dx}{5+4\cos x} \quad \int \frac{\sin 2x dx}{\sin x + \cos x}$$

2. Dla funkcji  $f : [0, 3] \rightarrow \mathbf{R}$  danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x \in [0, 2] \\ 2x-4, & x \in (2, 3] \end{cases}$$

znajdź funkcję górnej granicy całkowania, gdy  $c = 1$ .

3. Zbadaj zbieżność całek:

$$\int_0^1 \frac{x dx}{1-x} \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-x^2}} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

4. Oblicz pole (ew. zbadaj jego istnienie) figury:

a) ograniczonej krzywymi o równaniach:

- i)  $y^2 = -x$ ,  $y = x - 6$ ,  $y = -1$ ,  $y = 4$ ,
- ii)  $y = 2x^3$ ,  $y^2 = 4x$ ,
- iii)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  ( $x \geq 1$ ),
- iv)  $y^2 = (x - 1)^2$ ,  $y^2 = 2x$  i zawierającej  $(\frac{1}{2}, 0)$ ,
- b)** ograniczonej krzywą o równaniu  $y = -x^2 - 2x + 3$ , styczną do tej krzywej w punkcie  $(2, -5)$  i osią  $0y$ ,
- c)** ograniczonej wykresem funkcji  $x \mapsto \frac{x+2}{\sqrt{-x^2+5x-4}}$ , jej asymptotami oraz osią  $0x$ ,
- d)** ograniczonej osią  $0x$  i łukiem cycloidy o równaniu  $x = a(\phi - \sin \phi)$ ,  $y = a(1 - \cos \phi)$ ,  $a > 0$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ ,
- e)** ograniczonej krzywą o równaniu:
- i) okręgiem  $r = 2 \cos \phi$ ,
- ii)  $r = 4 \sin \phi$ ,
- iii)  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ ,
- f)** ograniczonej pętłą krzywej o równaniu:
- i)  $x = 2t - t^2$ ,  $y = 2t^2 - t^3$ ,
- ii)  $x = 3t^2$ ,  $y = 3t - t^3$ .
- 5.** Oblicz długość łuku :
- a)** krzywej o równaniu  $x = t^2$ ,  $y = t - \frac{1}{3}t^2$  w przedziale  $0 \leq t \leq \sqrt{3}$ ,
- b)** okręgu o równaniu  $r = 2a \cos \phi$ ,  $a > 0$ ,
- c)** krzywej będącej wykresem funkcji  $x \mapsto \sqrt{2x - x^2}$ ,
- d)** części paraboli o równaniu  $x = -y^2 + 2$  odciętej prostą  $x = -2$ .