

**Zestaw zadań – ELEMENTY GEOMETRII ANALITYCZNEJ  
W  $R^3$**

1. Znajdź kąty wewnętrzne trójkąta o wierzchołkach  $A(2, -1, 3)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C(0, 0, 5)$ .
2. Znajdź pole trójkąta o wierzchołkach  $A(1, -2, 8)$ ,  $B(0, 0, 4)$ ,  $C(6, 2, 0)$  oraz długość wysokości  $h_B$  z wierzchołka  $B$ .
3. Znajdź objętość czworościanu  $T$  o wierzchołkach  $A(1, 1, 2)$ ,  $B(-1, 3, 2)$ ,  $C(2, -1, 4)$ ,  $D(2, 3, 0)$ , objętość równoległościanu  $R$  zbudowanego na wektorach  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$  oraz długość wysokości  $h_D$  czworościanu  $T$  z wierzchołka  $D$ .
4. Znajdź równanie płaszczyzny:
  - i. przecinającej osie układu w punktach  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, -3, 0)$ ,  $(0, 0, 4)$ ;
  - ii. przechodzącej przez punkt  $(3, -1, 2)$  i prostopadłej do wektora  $[3, 2, 5]$ ;
  - iii. przechodzącej przez punkt  $(1, 5, 1)$  i równoległej do dwóch wektorów  $[2, 1, 6]$  i  $[-3, 5, 6]$ ;
  - iv. przechodzącej przez punkty  $(2, -1, 3)$ ,  $(1, 4, 2)$  i równoległej do wektora  $[3, 1, 5]$ ;
  - v. przechodzącej przez punkty  $(-1, 2, 4)$ ,  $(2, 1, 3)$ ,  $(3, -1, 5)$ ;
  - vi. przechodzącej przez punkt  $(0, 2, 1)$  i równoległej do płaszczyzny o równaniu  $2x + y - z - 2 = 0$ ;
  - vii. przechodzącej przez punkt  $(-1, 2, 4)$  i prostopadłej do płaszczyzn o równaniach:  $6x - 2y + 3z - 12 = 0$ ,  $3x + 2y - 6z + 21 = 0$ ;
  - viii. przechodzącej przez punkty  $(3, 5, 1)$ ,  $(7, 7, 8)$  i odcinającej na osiach  $ox$  i  $oy$  wektory  $O\vec{P}_1$ ,  $O\vec{P}_2$  o równych długościach i zgodnie równoległych z tymi osiami;
  - ix. wyznaczonej przez punkt  $(-3, 2, 1)$  i prostą 
$$\begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x + 2y + 3z + 8 = 0 \end{cases};$$
  - x. przechodzącej przez dwie proste równoległe:  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$  i  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$ .
5. Dane są równania trzech płaszczyzn  $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ ,  $x + 3y - 6 = 0$ ,  $z - 3 = 0$  zawierających trzy ściany równoległościanu i dany jest jeden z jego wierzchołków  $(6, -5, 1)$ . Znajdź równania płaszczyzn zawierających pozostałe ściany równoległościanu.
6. Rozważ położenie następujących płaszczyzn względem osi układu współrzędnych:  
 $Ax + By + D = 0$ ,  $ABD \neq 0$ ;

$$Ax + D = 0, AD \neq 0;$$

$$Ax + By = 0, AB \neq 0;$$

$$x = 0.$$

7. Podaj warunek równoległości oraz warunek prostopadłości płaszczyzn:  
 $Ax + By + Cz + D = 0$  i  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ .

8. Dla jakich wartości parametrów  $a$  i  $b$  płaszczyzny  $2x - y + 3z - 1 = 0$ ,  
 $x + 2y - z + b = 0$  i  $x + ay - 6z + 10 = 0$

- a) nie mają punktu wspólnego (podaj interpretację geometryczną),
- b) mają dokładnie jeden punkt wspólny,
- c) ich częścią wspólną jest prosta,
- d) pokrywają się?

9. Dana jest prosta  $\begin{cases} 2x + 3y - z - 1 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$ . Znajdź równanie tej prostej w postaci parametrycznej i w postaci kierunkowej.

10. Zbadaj dla jakich wartości parametru  $p$  prosta  $\begin{cases} x + py - z + 1 = 0 \\ 2x - py + z = 0 \end{cases}$  jest równoległa do płaszczyzny  $3x + py + 2z - 1 = 0$ .

11. Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkt  $(2, 3, 1)$  oraz:

- i. prostopadłej do płaszczyzny  $5x - 3y + 2z - 1 = 0$ ;
- ii. przechodzącej przez punkt przecięcia prostej  $x = 1 + t, y = -2t, z = 1 + 3t, t \in \mathbf{R}$  z płaszczyzną  $4x - y + 3z + 1 = 0$ ;
- iii. równoległej do płaszczyzn:  $6x - y + z - 2 = 0$  i  $x + 3y - 2z + 1 = 0$ ;

iv. prostopadłej do prostej  $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$  i do prostej  $x = 3t, y = -1 + t, z = -t, t \in \mathbf{R}$ ;

v. równoległej do płaszczyzny  $x - y + 7z - 1 = 0$  i przecinającej prostą  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z}{2}$ ;

vi. prostopadłej do prostej  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-1}$  i przecinającej prostą  $x = y = z$ .

12. Znajdź kąt między płaszczyzną  $3x - 2y + 4z = 1$  i prostą  $\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ 2y - 6z - 8 = 0 \end{cases}$ .