

**Zestaw zadań – GRANICE I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI JEDNEJ
ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ**

1. Oblicz granice:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{-3x^3 - x + 5}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 6x^2 - x + 3}{3x^3 - x - 9}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x + 5}{-x^3 + 6x^2 - x + 7}, \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - x^4 + 1}{x^3 + 7x - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{2}} \left| \frac{x+1}{x^2+2} \right|, \\ & \lim_{x \rightarrow 1} 3^{\frac{-1}{(x-1)^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin 3x}{x} + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + \sin x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} \sin(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+\sin^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x+8)}{2x^2 + 16x}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x+1}}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x+7} \right)^{x+1}, \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2+x+1} \right)^{3x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x), \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x+1}{x^2+1} \right)^{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{5^{x+3} - 1}{6x+18}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+10x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} 2^{\operatorname{tg} x}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x - \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x(2 + \cos x). \end{aligned}$$

2. Zbadaj istnienie granic funkcji:

$$f_1(x) = \frac{|x^3 - 4x|}{x - 2} \quad \text{gdy } x \rightarrow 2,$$

$$f_2(x) = \cos \frac{1}{x^2} \quad \text{gdy } x \rightarrow 0^-, \quad f_3(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{\operatorname{sgn}(x+1)} \quad \text{gdy } x \rightarrow 0.$$

3. Zbadaj ciągłość funkcji określonych wzorami:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = x + \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 5^{nx}}{1 + 5^{nx}}.$$

4. Określ wartość funkcji f w punkcie x_0 , tak aby była ona ciągła w tym punkcie:

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \quad x_0 = 0, \quad f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x} \quad x_0 = 0.$$

5. Znajdź wartości parametów a, b , dla których dane funkcje są ciągłe:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}, & x \in (-\infty, 0) \setminus \{-2\} \\ a^2 - 1, & x = -2 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^2-2}, & x \neq -\sqrt{2}, x \neq \sqrt{2} \\ a, & x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2} \end{cases},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 2 + e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ \frac{\sin ax}{x}, & x > 0 \end{cases}, \quad f_4(x) = \begin{cases} a + \operatorname{arctg} x, & x \leq 0 \\ x^2 + b, & x > 0 \end{cases}.$$

6. Uzasadnij, że równanie $3^x + x = 3$ ma rozwiązanie w przedziale $(0,1)$. Znajdź to rozwiązanie z dokładnością do 0,25.

7. Czy funkcja f dana wzorem $f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin x + 3$ przyjmuje wartość $\frac{7}{3}$ wewnątrz przedziału $[-2, 2]$?