Zestaw zadań – POCHODNA FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ

1. Znajdź pochodne funkcji określonych wzorami:

$$f_1(x) = (\mathrm{tg}x - x^2)(\cos x + \sqrt{x} - 2), \quad f_2(x) = e^{\mathrm{tg}x}\log_{x^2}(\mathrm{arctg}x),$$

$$f_3(x) = \log_x(\sin x), \quad f_4(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}x},$$

$$f_5(x) = x^{\sin x}, \quad f_6(x) = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}, a \text{ stała}, \quad f_7(x) = \mathrm{arctg}(\sin(\log_{x^2} 2^x)).$$

2. Zbadaj istnienie pochodnych funkcji danych wzorami:

$$f_1(x) = |x-1|^3 \cdot |x-2|, \quad f_2(x) = \sqrt[3]{x^2},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Oblicz drugą pochodną powyższych funkcji w punktach, w których ona istnieje.

3. Dla jakich wartości parametrów a, b, c funkcje f_1, f_2, f_3 mają pochodne w każdym punkcie dziedziny?

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x + a & , x < -1 \\ 3bx^2 + 1 & , x \geq -1, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} \sin x & , x < 0 \\ ax^2 + bx & , x \geq 0, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} ae^x + b & , x \leq 0 \\ 2 - x & , x \in (0, \pi) \\ c + \sin x & x \geq \pi. \end{cases}$$

4. Nie znajdując pochodnej funkcji określonej wzorem:

$$f(x) = (x+2)(x+1)x(x-3)$$

wykaż, że równanie $f'(x) = 0$ ma dokładnie trzy pierwiastki rzeczywiste oraz znajdź przedziały, w których się one znajdują.

5. Uzasadnij tożsamość: $\mathrm{arctg}x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

6. Znajdź przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^2e^{-x^2}$.

7. Wykaż prawdziwość nierówności:

i) $\ln x > 2\frac{x-1}{x+1}$, $x > 1$,

ii)$e^x > 1+x$, $x \neq 0$,

iii) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, $x > 0$.

8. Z jaką dokładnością odpowiedni wielomian przybliża daną funkcję:

i) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$, $0 \le x \le 1$,

ii) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $|x| \le \frac{1}{2}$.

9. Oblicz: $e^{-\frac{1}{4}}$ z dokładnością do $\frac{1}{100}$, $\sqrt{5}$ z dokładnością do $\frac{1}{30}$, $\ln(1,2)$ z dokładnością do $\frac{1}{10}$.

10. Oblicz granice:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \mathrm{tg} x}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{\mathrm{arctg} x - \frac{\pi}{2}}, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\ln(\sin(1-x))}, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}},$$

$$\lim_{x\to -1^+} (x+1)^2 \ln(x+1), \quad \lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1), \quad \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}), \quad \lim_{x\to -\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} - x,$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}, \quad \lim_{x\to 0} [\ln(1+x)]^x, \quad \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}, \quad \lim_{x\to 0}(\frac{2}{\pi}\mathrm{arccos} x)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\mathrm{tg} x)^{2x-\pi},$$

$$\lim_{x\to 3^-} (\frac{1}{3-x})^{\mathrm{tg}(3-x)}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}.$$

11. Zbadaj istnienie ekstremów funkcji określonych wzorami:

$$f_1(x) = x^2 e^{\frac{-x^2}{2}}, \quad f_2(x) = 6x^3 + 3x^2 + 2x - 5,$$

$$f_3(x) = (x-5)^2 \sqrt[3]{(x+1)^2}, \quad f_4(x) = |x| e^{-|x-1|}.$$

12. Znajdź najmniejsze i największe wartość funkcji:

$f_1(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ na przedziale $[0,2]$,

$f_2(x) = \mathrm{arctg}\frac{1-x}{1+x}$ na przedziale $[0,1]$,

$f_3(x) = |x^2 - 6x - 7|$ na przedziale $[0,9]$.

13. Znajdź przedziały wklęsłości i wypukłości funkcji określonej wzorem $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$.

14. Znajdź asymptoty wykresów funkcji danych wzorami:

$$f_1(x) = xe^{\frac{1}{x}}, \quad f_2(x) = x\ln(e + \frac{1}{x}), \quad f_3(x) = \frac{1}{e^x - 1}, \quad f_4(x) = \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}.$$