

Zestaw zadań – PODSTAWOWE WIADOMOŚCI

1. Podaj interpretację geometryczną zbiorów:

$\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$

$X^3 = X \times X \times X$, gdzie $X = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x < 1\}$

$\{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\} \times \mathbf{R}$

$\{z \in \mathbf{R} : 0 \leq z \leq 4\} \times \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 4\}$

$\{x \in \mathbf{R} : x < 1 \vee 1 < x\} \times \{y \in \mathbf{R} : y^2 > 0\}$

$\{x \in \mathbf{R} : 0 < x < 1 \vee 2 < x \leq 3\} \times \{y \in \mathbf{R} : 1 < y \leq 2 \vee 3 \leq y < 4\}$

2. Znajdź kresy zbiorów:

$$\left\{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}\right\}, \quad \left\{x : x = 1 - \frac{2}{y^2}, y \in [1, +\infty)\right\}$$

$$\{x : x = 1 + y^2, y \in (-1, 1)\}, \quad \{x : x = \sqrt[3]{y} - 2, y \in [-8, 1)\}$$

3. Funkcja $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest funkcją rosnącą. Co można powiedzieć o monotoniczności funkcji: $f_i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ gdzie $f_1(x) = f(-x)$, $f_2(x) = f(|x|)$, $f_3(x) = f(kx)$, $f_4(x) = |f(x)|$, $x \in \mathbf{R}$, k -stała.

4. Niech $f : A^2 \rightarrow A$, $f(x, y) = x + y + 1$, $g : A^2 \rightarrow A$, $g(x, y) = \max\{x, y\}$, gdzie $A = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Czy f , g są funkcjami surjektywnymi, iniektywnymi?

5. Wyznacz dziedziny i zbiory wartości funkcji danych wzorami: $f_1(x) = \log_3(1 + |x|)$, $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $f_3(x) = \sqrt{x-x^2}$.

6. Znajdź funkcje złożone $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, gdy $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = 2^x$.

7. Znajdź funkcje odwrotne do danych wzorami: $f_1(x) = 1 - 3^{-x}$, $f_2(x) = \log_2^3(x+1)$.

8. Rozwiąż równania:

$$2x + 1 = (x + 1)^2 - x^2,$$

$$2x = (x + 1)^2 - x^2,$$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x,$$

$$||x - 1| - 1| = x - 1,$$

$$x^{\log_2(x-2) + \log_2(x-3)} = \frac{1}{x},$$

$$|\log_2(3x - 1) - \log_2 3| = |\log_2(5 - 3x) - 1|.$$

9. Dana jest funkcja f wzorem $f(x) = x^2 + 2x$. Rozwiąż nierówność: $f(f(x)) - [f(x)]^2 < 6x$.

10. Rozwiąż nierówności:

$$|x - 1| + |x - 5| \leq 10 - 2x,$$

$$\frac{2x^2 + 2x + 4}{x^3 - 3x - 2} \leq -2,$$

$$\sqrt{2 + x - x^2} > x - 1,$$

$$\frac{2^x + 1 - 2^{1-x}}{1 - 2^{2-x}} \geq 0,$$

$$\log_x(2 - x) < 2,$$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(4^{x+1} - 16^x) \geq -8x,$$

$$\frac{\sin x}{(x-4)^2} > |\sin x|, x \in (0, 2\pi).$$

11. Wykaż, że $|x| = x \operatorname{sgn} x$.

12. Naszkicuj wykresy funkcji danych wzorami: $f_1(x) = ||x + 1| - 2|$, $f_2(x) = 2 \sin x$, $f_3(x) = -1 + \arccos(x + 5)$, $f_4(x) = (\frac{1}{3})^{-|x|}$.

13. Wykaż prawdziwość wzorów (nie korzystając z pochodnych funkcji cyklotometrycznych):

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\Pi}{2},$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, x > 0,$$

$$\operatorname{arctg} x = \Pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, x < 0.$$