Zestaw zadań – PODSTAWOWE WIADOMOŚCI

1. Podaj interpretację geometryczną zbiorów:
$\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$
$X^3 = X \times X \times X$, gdzie $X = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x < 1\}$
$\{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\} \times \mathbf{R}$
$\{z \in \mathbf{R} : 0 \leq z \leq 4\} \times \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 4\}$
$\{x \in \mathbf{R} : x < 1 \vee 1 < x\} \times \{y \in \mathbf{R} : y^2 > 0\}$
$\{x \in \mathbf{R} : 0 < x < 1 \vee 2 < x \leq 3\} \times \{y \in \mathbf{R} : 1 < y \leq 2 \vee 3 \leq y < 4\}$

2. Znajdź kresy zbiorów:
$$\{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}\}, \quad \{x : x = 1 - \frac{2}{y^2}, y \in [1, +\infty)\}$$
$$\{x : x = 1 + y^2, y \in (-1, 1)\}, \quad \{x : x = \sqrt[3]{y} - 2, y \in [-8, 1)\}$$

3. Znajdź część rzeczywistą i urojoną liczb zespolonych:
$$\frac{(\sqrt{3} + \imath)(-1 + \imath\sqrt{3})}{(1 + \imath)^2}, \quad \frac{1 - \imath}{2 + \imath}$$

4. Przedstaw w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:
3, -5, $1 + \imath$, $-\imath$, $\sqrt{3} - \imath$

5. Oblicz:
$$(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath)^5, \quad \frac{(-1 - \imath\sqrt{3})^{15}}{(1 + \imath)^{20}}, \quad \sqrt[5]{\frac{-1 + \imath}{\sqrt{3} - \imath}}$$
$$\sqrt{1 - \imath\sqrt{3}}, \quad \sqrt{-7 + 24\imath}, \quad \sqrt[4]{-1}, \quad \sqrt[4]{(1 + \imath)^4}, \quad \mathrm{e}^{\Pi\imath}, \quad \mathrm{e}^{1 + \frac{\Pi}{2}\imath}$$

6. Podaj interpretację geometryczną zbiorów:
$\{z \in \mathbf{C} : 2 < |z| \leq 3, \frac{\Pi}{6} < \arg z \leq \frac{3\Pi}{4}\}$
$\{z \in \mathbf{C} : |\frac{z-5}{z-1}| = 1\}$
$\{z \in \mathbf{C} : \frac{|z-3|}{|z-3\imath|} > 1\}$
$\{z \in \mathbf{C} : |z - \imath| \leq \frac{1}{2}\}$
$\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{re}(z - 2) \leq 1, \arg(z - 1 + \imath) = \frac{\Pi}{6}\}$
$\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{re} z < 3 + 5\mathrm{im} z\}$
$\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{re}(z^2) = 2, [\mathrm{im}(z + \imath)]^2 = 1\}$
$\{z \in \mathbf{C} : 0 < \arg(\imath z) < \frac{\Pi}{4}\}$
$\{z \in \mathbf{C} : \frac{-\Pi}{2} \leq \arg \frac{\imath}{z-\imath} \leq \frac{\Pi}{4}\}$

7. Znajdź zbiory punktów na płaszczyźnie zespolonej spełniających warunki:
$z = 1 + 2\imath + t\mathrm{e}^{\imath\frac{\Pi}{4}}$, $t \in \mathbf{R}$;

$z = 2 - 3\imath + 2e^{\imath t}$, $t \in \mathbf{R}$;
$|z - 2 + 3\imath| \geq 5$;
$\arg(-\overline{z}) \geq \frac{\Pi}{2}$;
$\arg(2 + \imath - z) \in [\frac{\Pi}{6}, \Pi]$;
$\arg(z^4) = \Pi$;
$\arg[(\imath\sqrt{3} - 1)(z - 2 + \imath)^3] \in [\frac{\Pi}{4}, \frac{\Pi}{2})$;
$\arg(\frac{\imath}{(z-\imath+1)^3}) = \frac{\Pi}{3}$.

8. Rozwiąż równania (nad ciałem $\mathbf{C}$):
$z^2 + z + 1 = 0$, $z^2 + (1 - 2\imath)z - 2\imath = 0$, $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$,
$(z + 1 - 2\imath)^4 + \frac{(1+\imath)^{20}}{(1-\imath\sqrt{3})^9} = 0$.

9. Wykaż prawdziwość wzorów:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 : z_2} = \overline{z_1} : \overline{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$,
$\overline{\overline{z_1}} = z_1$, $z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2$, $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $(z_2 \neq 0)$

10. Funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest funkcją rosnącą. Co można powiedzieć o monotoniczności funkcji: $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ gdzie $f_1(x) = f(-x)$, $f_2(x) = f(|x|)$, $f_3(x) = f(kx)$, $f_4(x) = |f(x)|$, $x \in \mathbf{R}$, k-stała

11. Niech $f : A^2 \to A$, $f(x, y) = x + y + 1$, $g : A^2 \to A$, $g(x, y) = \max\{x, y\}$, gdzie $A = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Czy f, g są funkcjami surjektywnymi, injektywnymi?

12. Wykaż prawdziwość wzorów (nie korzystając z pochodnych funkcji cyklometrycznych):
$\arcsin x + \arccos x = \frac{\Pi}{2}$,
$\mathrm{arcctg} x = \mathrm{arctg}\frac{1}{x}$, $x > 0$,
$\mathrm{arcctg} x = \Pi + \mathrm{arctg}\frac{1}{x}$, $x < 0$