Zestaw zadań – RACHUNEK CAŁKOWY FUNKCJI DWÓCH LUB TRZECH ZMIENNYCH

1. W podanych całkach zmień kolejność całkowania:

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y)dy, \quad \int_{0}^{4} dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy.$$

2. Całkę $\int\int_D f(x,y)dxdy$ zamień na całki iterowane gdy:
a) D jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,1)$, $(-2,1)$,
b) $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y^2 \geq x^2, y \leq 4 - x^2, y \geq 0\}$.

3. Oblicz:
a) $\int\int_D (x^2 + y)dxdy$, gdzie D jest ograniczony krzywymi o równaniach $y = x^2$, $y^2 = x$,
b) $\int\int_D xydxdy$, gdzie $D = \{(x,y) : x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$,
c) $\int\int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$, gdzie $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 - Rx \leq 0, y \geq 0\}$.

4. Znajdź pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach:
a) $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$, $x + y = a$, $x + 3y = a$, $a > 0$, $a \equiv const.$,
b) $xy = a^2$, $x + y = \frac{5}{2}a$, $a > 0$, $a \equiv const.$,
c) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$.

5. Oblicz:
a) $\int\int\int_E y\cos(x+z)dxdydz$, gdzie E ograniczony jest powierzchniami o równaniach $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$,
b) $\int\int\int_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$, gdzie $E = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x\}$.

6. Oblicz masę bryły ograniczonej powierzchniami o równaniach $z = 2 - x^2 - y^2$ oraz $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ wiedząc, że gęstość w każdym jej punkcie jest równa kwadratowi odległości tego punktu od osi Oz.

7. Znajdź objętość bryły ograniczonej powierzchniami:
a) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, $z = 1 + x + y$,
b) $y = x^2$, $z = x^2 + y^2$, $y = 1$, $z = 0$,
c) $z = 2x^2 + y^2 + 1$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$,
d) $z = xy$, $y = x^2$, $x^2 = 2y$, $x = y^2$, $y^2 = 2x$, $z = 0$,
e) $z = xy$, $x + y + z = 1$, $z = 0$,
f) $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x = 0$, płaszczyznę Oxy,
g) $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = -1$.

8. Oblicz:
a) $\int_K xydl$, gdzie K jest brzegiem kwadratu $|x| + |y| \leq 4$,

b) $\int_K (y-x)dl$, gdzie K jest krzywą daną równaniem $y = x^3$, zawartą między punktami $(1,1)$ i $(2,8)$,

c) $\int_K (y-x)dl$, jeżeli K jest krzywą zamkniętą $OABCO$, przy czym OA jest odcinkiem, AB jest łukiem okręgu $x^2+y^2=2$, $z=0$, BC jest łukiem paraboli $z=(x-1)^2$, $y=1$, CO jest odcinkiem, gdzie punkt C leży na płaszczyźnie Oyz, punkt A leży na dodatniej półosi Ox.

9. Oblicz masę krzywej $K: r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, $t \in [0, 2\pi]$, jeżeli gęstość w każdym punkcie krzywej jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu promienia wodzącego tego punktu i w punkcie $(1,0,1)$ wynosi 1.

10. Oblicz pole części powierzchni bocznej walca $x^2+y^2=1$ ograniczonej płaszczyznami $z=-x$, $z=5+y$.

11. Oblicz pole części powierzchni walcowej $x^2+y^2=4x$ zawartej wewnątrz kuli $x^2+y^2+z^2 \leq 16$.

12. Oblicz długość jednego zwoju linii śrubowej nawiniętej na walec o promieniu 3, zakończonego na wysokości 4π.

13. Oblicz:

a) $\int_K x^2dx + xydy$, gdzie K jest częścią okręgu $x^2+y^2=R^2$ zawartą w pierwszej ćwiartce między punktem $(0,R)$ a punktem $(R,0)$,

b) $\int_K (x-y)dx + (x+y)dy$, gdzie K dana jest równaniem $y = \sin x$, $x \in [0,\pi]$,

c) $\int_K ydx - xydy + zdz$, gdzie K jest odcinkiem o początku w punkcie $(-2,1,4)$ i końcu w punkcie $(3,-3,1)$.

14. Oblicz cyrkulację pola $W(x,y,z) = (-y,x,3)$ wzdłuż okręgu $(x-2)^2+y^2=1$, $z=0$ zorientowanego dodatnio.

15. Oblicz pracę potrzebną do przemieszczenia punktu materialnego o masie jednostkowej wykonaną przez pole $W(x,y,z) = (y, z^2, 2x+y)$, wzdłuż obwodu trójkąta o wierzchołkach $A=(0,0,1)$, $B=(3,4,5)$, $C=(2,5,4)$ obieganego w kolejności $OABCO$.

16. Sprawdź czy dane pola są potencjalne. Znajdź ich potencjały (jeżeli istnieją):

a)$V(x,y,z) = (e^{xy}\sin x, y^3+z, -\text{arctg}(xz))$,

b) $V(x,y) = ((x+y+1)e^x - e^y, e^x - (x+y+1)e^y)$.

17. Wykaż, że dane całki nie zależą od drogi całkowania K, jeżeli K jest łukiem gładkim, o początku w punkcie A i końcu w punkcie B:

a) $\int_K \frac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$, gdzie K leży w półpłaszczyźnie $x+y>0$,

b) $\int_K (2x+yz)dx + (3y^2+xz)dy + (4z^3+xy)dz$.

Oblicz te całki dla: a) $A = (5, 0)$, $B = (2, 3)$, b) $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 1, 1)$.

18. Oblicz, korzystając z twierdzenia Greena:

a) $\int_K (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$, jeżeli K jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 5)$ zorientowanym ujemnie,

b) $\int_K xy^2 dx + 3 \cos y dy$, gdzie K jest dodatnio zorientowanym brzegiem obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^2$, $y = x^3$.

19. Oblicz pole figury ograniczonej krzywymi o równaniach: $y = x$, $y = \frac{x}{2}$, $x + y = 2$.

20. Oblicz:

a) $\int \int_S (2x + 1) dS$, gdzie S dana jest równaniem $x = \sqrt{4 - y^2}$ dla $0 \leq z \leq 1$,

b) $\int \int_S (2x + \frac{4}{3} y + z) dS$, gdzie S jest częścią płaszczyzny $\frac{1}{2} x + \frac{1}{3} y + \frac{1}{4} z = 1$ dla $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$,

c) $\int \int_S (xy + xz + yz) dS$, jeżeli S jest częścią powierzchni stożkowej $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ wyciętej walcem $x^2 + y^2 = 4x$,

d) $\int \int_S (x^2 + y^2) dS$, gdzie S jest powierzchnią ograniczającą zamknięty walec $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

21. Oblicz masę tej części paraboloidy $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, która zawarta jest między płaszczyznami $z = \frac{1}{2}$ i $z = 1$ oraz, której gęstość w każdym punkcie równa się trzeciej współrzędnej tego punktu.

22. Znajdź pole tej części powierzchni $2z = xy$, która leży wewnątrz walca $x^2 + y^2 = 4$.

23. Osie dwóch powierzchni walcowych o tym samym promieniu 2 przecinają się pod kątem prostym. Oblicz tę część pola jednej powierzchni, która znajduje się wewnątrz drugiej.

24. Znajdź pole powierzchni części stożka $x^2 + y^2 = z^2$ leżącej nad płaszczyzną Oxy i odciętej płaszczyzną $z = \sqrt{2}(\frac{1}{2} x + 1)$.

25. Oblicz:

a) $\int \int_S z^2 dxdy$, jeżeli S jest zewnętrzną stroną części elipsoidy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$, $z \geq 0$,

b) $\int \int_S dydz - 2dzdx + x^3 dxdy$, jeżeli S jest częścią leżącą w pierwszym oktancie zewnętrznej strony zamkniętej powierzchni utworzonej z powierzchni stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ i paraboloidy $x^2 + y^2 = 4z - 4$,

c) $\int \int_S xdydz - dzdx + ydxdy$, jeżeli S jest częścią zewnętrznej strony powierzchni ostrosłupa o wierzchołkach $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$, $C = (0, 0, 1)$, którą otrzymujemy przez usunięcie ściany AOC.

26. Oblicz strumień pola:

a) $W = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ przez powierzchnię boczną stożka $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq 4$ zorientowaną do wewnątrz,

b) $W(x, y, z) = (5x + z, x - 3y, 4y - 2z)$ przez górną część płaszczyzny $x + y + z = 2$ odciętą płaszczyznami układu współrzędnych.

27. Oblicz, korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego:

a) $\int\int_S xzdydz + x^2ydzdx + y^2zdxdy$, jeżeli S jest zewnętrzną stroną powierzchni brzegowej bryły znajdującej się w pierwszym oktancie i ograniczonej paraboloidą $z = x^2 + y^2$, walcem $x^2 + y^2 = 1$ i płaszczyznami układu współrzędnych,

b) $\int\int_S z^3dydz + x^2dzdx + xz\cos ydxdy$, jeżeli S jest wewnętrzną stroną powierzchni brzegowej bryły ograniczonej powierzchniami o równaniach $x = 0$, $x = \sin y$, $y = 0$, $y = \pi$, $z = 0$, $z = x\sin y$.

28. Oblicz, korzystając z twierdzenia Stokesa:

a) $\int_K ydx + zdy + xdz$, gdzie K jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A = (0, 0, 1)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (1, 0, 0)$ obieganego w kolejności $ABCA$ w prawoskrętnym układzie współrzędnych,

b) $\int_K zdx + xdy + ydz$, jeżeli krzywa K jest przecięciem powierzchni o równaniu $z = xy$ z walcem $x^2 + y^2 = 9$ i jest przebiegana w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara dla obserwatora umieszczonego na dodatniej półosi Ox (dla $x > 3$),

c) $\int_K y^2dx + z^2dy + x^2dz$, jeżeli krzywa K jest przecięciem powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$ i $x^2 + y^2 = 3x$ i jest przebiegana w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara dla obserwatora umieszczonego na dodatniej półosi Ox (dla $x > 3$).