

**Zestaw zadań – RACHUNEK RÓŻNICZKOWY FUNKCJI
WIELU ZMIENNYCH**

1. Znajdź pochodne kierunkowe w punkcie $(0,0)$ funkcji f danej wzorem $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Napisz odwzorowanie, które wektorowi z \mathbf{R}^2 przyporządkowuje pochodną kierunkową funkcji f w jego kierunku w punkcie $(0,0)$. Czy funkcja f jest różniczkowalna w $(0,0)$? Czy funkcja f jest ciągła w $(0,0)$?

2. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ w punkcie $(0,0)$.

3. Wykaż, że funkcje f, g dane wzorami:

$$f(x, y, z) = (x + z^2, xyz^2), \quad g(u, v) = (u^2 + v, uv, e^v)$$

są różniczkowalne w swoich dziedzinach. Napisz macierze Jacobi'ego tych funkcji. Oblicz macierz Jacobi'ego $g \circ f$ w punkcie $(1,2,1)$ (na dwa sposoby). Oblicz macierz Jacobi'ego funkcji $(f \circ g)^{-1}$ w punkcie $(5,0) = (f \circ g)(2,0)$ (gdzie funkcję $f \circ g$ odwracamy w odpowiednio małym otoczeniu punktu $(2,0)$).

4. Oblicz pochodne cząstkowe i zbadaj różniczkowalność podanych funkcji. Napisz wzory na ich różniczki. Oblicz pochodne cząstkowe rzędu drugiego.

$$f_1(x, y) = \frac{\sin(2xy)}{x^2 + y^2 + 1}, \quad f_2(x, y) = (x \cos y, x \sin y, 2y^2),$$

$$f_3(x, y, z) = (xyz, x - yz, 2z).$$

5. Wyznacz pochodną kierunkową funkcji:

$$f_1(x, y, z) = y \arctg\left(\frac{x^2 + y^2 + 1}{z^2 + 1}\right)$$

w punkcie $(0,-1,1)$ w kierunku wektora $[1, -2, 2]$;

$$f_2(x, y, z) = \left(\frac{z-x}{z+y}, \ln(x+z^2)\right)$$

w punkcie $(1,0,-3)$ w kierunku wektora $[-6, 3, -2]$.

6. Podaj wzór na drugą różniczkę funkcji:

$$f_1(x, y) = e^x \sin y \text{ w punkcie } (0,0),$$

$$f_2(x, y) = ((x+y)^3, x^4 + y^3x^3) \text{ w punkcie } (-1,1)$$

oraz znajdź pochodne kierunkowe drugiego rzędu $\frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta \partial \xi}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f_2}{\partial \eta \partial \xi}(-1,1)$,
gdzie $\xi = [2, 3]$, $\eta = [-1, 2]$.

7. Zbadaj ekstrema lokalne funkcji danych wzorami:

$$f_1(x, y) = x^3 + 3x^2y - 6xy - 3y^2 - 15x - 15y,$$

$$f_2(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y,$$

$$f_3(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2),$$

$$f_4(x, y) = xy(3 - x - y),$$

$$f_5(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

8. Znajdź wartości największe i najmniejsze funkcji określonych wzorami:

$$f_1(x, y) = (x - y)^2 + xy - x \text{ na kwadracie } [0, 1] \times [0, 1],$$

$$f_2(x, y) = x^2y - 8x - 4y \text{ na trójkącie o wierzchołkach } (0,0), (4,0), (0,4),$$

$$f_3(x, y) = xye^x \text{ na zbiorze ograniczonym przez prostą } y = 4 \text{ i parabolę } y = x^2,$$

$$f_4(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 \text{ na kuli } x^2 + y^2 + z^2 \leq 100,$$

$$f_5(x, y, z) = x + y + z \text{ na zbiorze } \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

9. Napisz równanie płaszczyzny stycznej i prostej normalnej do:

a) wykresu funkcji f danej wzorem $f(x, y) = y + \ln x$ w punkcie $(1, 1, 1)$,

b) powierzchni o równaniach:

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}, \quad z = xy$$

w dowolnym punkcie każdej z tych powierzchni (takim, w którym płaszczyzna styczna istnieje).

10. Napisz równanie prostej stycznej do:

a) przecięcia stożka $z^2 = x^2 + y^2$ z walcem $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ w punkcie $(1, \sqrt{3}, 2)$,

b) wykresu funkcji uwikłanej określonej równaniem $2 + x^3 + y^3 = e^x + e^y$ w $(0, 0)$.

11. Sprawdź czy funkcja

$$g : \mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto \left(\frac{z}{x^2 + y^2 + 1}, xy \right) \in \mathbf{R}^2$$

ma różniczkę w dowolnym punkcie dziedziny. Napisz macierz Jacobi'ego funkcji g w punkcie $(0, -1, 1)$ oraz wzór na różniczkę funkcji g w punkcie

$(0, -1, 1)$. Wyznacz pochodną kierunkową funkcji g w punkcie $(0, -1, 1)$ w kierunku wektora kierunkowego prostej normalnej do powierzchni

$$z = y + \ln \frac{x}{z}$$

w punkcie $(1, 1, 1)$.