Zestaw zadań – RACHUNEK RÓŻNICZKOWY FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

1. Znajdź granice iterowane i zbadaj istnienie granicy podwójnej funkcji:

$$f_1(x,y)=\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2},\quad (x,y)\to(0,0);\quad f_2(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2},\quad (x,y)\to(0,0);$$

$$f_3(x,y)=(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}},\quad (x,y)\to(0,0);$$

$$f_4(x,y)=x\sin\frac{1}{y^2},\quad (x,y)\to(0,0).$$

2. Podaj przybliżoną wartość wyrażeń: $\frac{2{,}01\cdot 1{,}03}{(2{,}01)^2-(1{,}03)^2}$, $\quad (1,02)^{3,01}$.

3. Wykaż, że funkcja

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ma w (0,0) pochodne cząstkowe ale nie jest ciągła w (0,0). Czy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie (0,0)?

4. Znajdź pochodne kierunkowe w punkcie (0,0) funkcji f danej wzorem $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$. Napisz odwzorowanie, które wektorowi z $\mathbf{R}^2$ przyporządkowuje pochodną kierunkową funkcji f w jego kierunku w punkcie (0,0). Czy funkcja f jest różniczkowalna w (0,0)? Czy funkcja f jest ciągła w (0,0)?

5. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ w punkcie (0,0).

6. Sprawdź, że funkcja f dana wzorem $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ jest ciągła w (0,0), ale nie ma w (0,0) pochodnych cząstkowych.

7. Wykaż, że funkcje f, g dane wzorami:

$f(x,y,z)=(x+z^2,xyz^2)$, $g(u,v)=(u^2+v,uv,e^v)$

są różniczkowalne w swoich dziedzinach. Napisz macierze Jacobi'ego tych funkcji. Oblicz macierz Jacobi'ego $g\circ f$ w punkcie (1,2,1) (na dwa sposoby). Oblicz macierz Jacobi'ego funkcji $(f\circ g)^{-1}$ w punkcie $(5,0)=(f\circ g)(2,0)$ (gdzie funkcję $f\circ g$ odwracamy w odpowiednio małym otoczeniu punktu (2,0)).

8. Oblicz pochodne cząstkowe i zbadaj różniczkowalność podanych funkcji. Napisz wzory na ich różniczki. Oblicz pochodne cząstkowe rzędu drugiego.

$$f_1(x,y) = \frac{\sin(2xy)}{x^2+y^2+1}, \quad f_2(x,y) = (x\cos y, x\sin y, 2y^2),$$

$$f_3(x,y,z) = (xyz, x-yz, 2z).$$

9. Wyznacz pochodną kierunkową funkcji:

$$f_1(x,y,z) = y\mathrm{arctg}(\frac{x^2+y^2+1}{z^2+1})$$

w punkcie (0,-1,1) w kierunku wektora $[1,-2,2]$;

$$f_2(x,y,z) = (\frac{z-x}{z+y}, \ln(x+z^2))$$

w punkcie (1,0,-3) w kierunku wektora $[-6,3,-2]$.

10. Podaj wzór na drugą różniczkę funkcji:
$f_1(x,y) = e^x \sin y$ w punkcie (0,0),
$f_2(x,y) = ((x+y)^3, x^4+y^3x^3)$ w punkcie (-1,1)
oraz znajdź pochodne kierunkowe drugiego rzędu $\frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta\partial\xi}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta\partial\xi}(-1,1)$, gdzie $\xi = [2,3]$, $\eta = [-1,2]$.

11. Zastosuj wzór Taylora przy $k = 2$ do funkcji f w otoczeniu punktu (x_0,y_0):
a) $f(x,y) = 2x^3+y^2+x^2y, \quad (x_0,y_0) = (1,2)$,
b) $f(x,y) = e^{x+2y}, \quad (x_0,y_0) = (0,0)$.

12. Oblicz pochodne $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$ funkcji uwikłanych $y = y(x)$ danych równaniami:
i) $2y^2 - 4x^3y + 5x^2 - 12 = 0$,
ii) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \mathrm{arctg}\frac{x}{y}$.

13. Oblicz pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanej $y = y(x)$ danej równaniem $xe^y + ye^x - 2 = 0$ w punkcie $x_0 = 0$.

14. Sprawdź czy podane równania określają jednoznacznie ciągłą funkcję uwikłaną postaci $y = y(x)$ lub $x = x(y)$ na pewnych otoczeniach wskazanych punktów:
a) $x^2 - 2^y - 1 = 0, \quad A = (\sqrt{3},1), \quad B = (3,3)$,
b) $x = \cos y, \quad A = (1,0), \quad B = (\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3})$.

15. Oblicz pochodne cząstkowe funkcji uwikłanej $z = z(x,y)$ danej równaniem:

a) $ye^z + ze^{3x} = 0$,
b) $x^2 + y^3 + z^4 = x + z$.
Znajdź z''_{xy}.
16. Zbadaj ekstrema lokalne funkcji danych wzorami:

$$f_1(x,y) = x^3 + 3x^2y - 6xy - 3y^2 - 15x - 15y,$$

$$f_2(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y,$$

$$f_3(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2),$$

$$f_4(x,y) = xy(3 - x - y),$$

$$f_5(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \quad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0).$$

17. Znajdź wartości największe i najmniejsze funkcji określonych wzorami:
$f_1(x,y) = (x-y)^2 + xy - x$ na kwadracie $[0,1] \times [0,1]$,
$f_2(x,y) = x^2y - 8x - 4y$ na trójkącie o wierzchołkach (0,0), (4,0), $(0,4)$,
$f_3(x,y) = xye^x$ na zbiorze ograniczonym przez prostą $y = 4$ i parabolę $y = x^2$,
$f_4(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ na kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$,
$f_5(x,y,z) = x + y + z$ na zbiorze $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.
18. Napisz równanie płaszczyzny stycznej i prostej normalnej do:
a) wykresu funkcji f danej wzorem $f(x,y) = y + \ln x$ w punkcie (1,1,1),
b) powierzchni o równaniach:

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}, \qquad z = xy$$

w dowolnym punkcie każdej z tych powierzchni (takim, w którym płaszczyzna styczna istnieje).
19. Napisz równanie prostej stycznej do:
a) przecięcia stożka $z^2 = x^2 + y^2$ z walcem $(x-2)^2 + y^2 = 4$ w punkcie $(1, \sqrt{3}, 2)$,
b) wykresu funkcji uwikłanej określonej równaniem $2 + x^3 + y^3 = e^x + e^y$ w (0,0).
20. Sprawdź czy funkcja

$$g : \mathbf{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto \left(\frac{z}{x^2 + y^2 + 1}, xy\right) \in \mathbf{R}^2$$

ma różniczkę w dowolnym punkcie dziedziny. Napisz macierz Jacobi'ego funkcji g w punkcie $(0, -1, 1)$ oraz wzór na różniczkę funkcji g w punkcie $(0, -1, 1)$. Wyznacz pochodną kierunkową funkcji g w punkcie $(0, -1, 1)$ w kierunku wersora kierunkowego prostej normalnej do powierzchni

$$z = y + \ln \frac{x}{z}$$

w punkcie $(1, 1, 1)$.