RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

1. Sprawdzić czy dana funkcja jest rozwiązaniem podanego równania :
$y = \frac{C^2-x^2}{2x}$, $C \equiv const$; $x + y + xy' = 0$,
$y = x^4$; $xy' = 2y$,
$y = x\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$; $xy' = y + x\sin x$.
2. Rozwiązać równania:
$xy' + (1+y^2)\arctan y = 0$,
$y' = \cos y$,
$y' = xy + ax + by + ab$,

Dla powyższych równań określić obszar, w którym założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania są spełnione.

$xe^{\frac{y}{x}} - y\sin(\frac{y}{x}) + x\sin(\frac{y}{x})y' = 0$,
$\frac{1}{2x^2-2xy-2y^2} = \frac{y'}{y^2-4xy}$,

$y' = (x-y)^2 + 1$,
$y' = \left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$,
$x + y - 1 + (x-y-1)y' = 0$,
$y' = \frac{1}{2x+y} + 2x + y - 2$,
$\frac{1}{y+x} = \frac{y'}{y-x}$,

$y' - 3y = 2$,
$y' + 2yx = e^{-x^2}$,
$y'\cos x - y\sin x = \cos^2 x$,
$y' = \frac{x^3+y}{x}$,

$xy' + xy^2 - y = 0$,
$y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{2/3}$.
3. Znaleźć rozwiązania szczególne poniższych równań, spełniające dane warunki początkowe:
$y' = e^{x+y}$, $y(0) = 0$,
$xe^{\frac{y}{x}} + y = xy'$, $y(1) = 0$,
$x + y + (3x+3y-4)y' = 0$, $y(1) = 0$,
$y' + \frac{2y}{x} = \frac{\cos x}{x^2}$, $y(\pi) = 0$,
$(1-x^2)y' + xy = 1$, $y(0) = 1$,

$xy' + y = y^2 \ln x,\ y(1) = 1.$

4.

a) Rozwiązać równania:

$(x - 2xy + e^y)dx + (y - x^2 + xe^y)dy = 0,$

$\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \frac{e^y dy}{1+x^2} = 0,$

b) Znaleźć rozwiązanie szczególne równania

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0$$

spełniające warunek początkowy $y(1) = 0.$

c) Rozwiązać równania, znajdując czynniki całkujące zależne tylko od jednej zmiennej:

$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0,$

$e^x(x + 1)dx + (ye^y - xe^x)dy = 0.$

5. Znaleźć rozwiązania ogólne równań różniczkowych liniowych:

$y'' + 3y' + 2y = 8 + 6e^x + 2\sin x,$

$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x},$

$y^{(IV)} - 2y'' + y = x - \sin x,$

$y'' + 9y = 2x\sin x + xe^{3x},$

$y'' - 2y' + y = -e^x \ln x,$

$y'' - 2y' + 2y = 2\cos x + \sin x,$

$y'' - 5y' + 6y = e^x \cos 2x + e^{2x}(3x + 4)\sin x,$

$y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4,$

$y^{(IV)} + 8y'' + 16y = 0,$

$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$

6. Rozwiązać problem Cauchy'ego:

$y'' + 4y = \sin 2x,\ y(0) = y'(0) = 0,$

$y''' - y' = 0,\ y(2) = 1,\ y'(2) = y''(2) = 0.$

7. Zbadać czy dane funkcje stanowią układ fundamentalny rozwiązań odpowiedniego równania liniowego jednorodnego, a następnie podać rozwiązania ogólne równań liniowych:

$xy'' + 2y' - xy = e^x;\ y_1 = \frac{e^x}{x},\ y_2 = \frac{e^{-x}}{x},\ x > 0,$

$x^2y'' - 4xy' + 6y = x;\ y_1 = x^3,\ y_2 = x^2,\ x > 0.$

8. Dla jakich a równanie $y'' = ay$ ma rozwiązanie niezerowe spełniające warunek $y(0) = y(1) = 0.$

9. Znaleźć rozwiązania ogólne następujących układów równań liniowych:

$x' = -3x + 4y - 2z,\ y' = x + z,\ z' = 6x - 6y + 5z;$

$x' = 4x - y,\ y' = 3x + y - z,\ z' = x + z;$
$x' = y + z,\ y' = x + y,\ z' = -x + z;$
$x' + 5x + y = e^t,\ y' + 3y - x = e^{2t};$
$x' = 2x + y - 2z - t + 2,\ y' = -x + 1,\ z' = x + y - z - t + 1.$

10. Rozwiązać problem początkowy Cauchy'ego:
$x' = -y + z,\ y' = z,\ z' = -x + z,\ x(0) = 1,\ y(0) = \frac{1}{2},\ z(0) = \frac{1}{2};$
$x' = x - z,\ y' = -6x + 2y + 6z,\ z' = 4x + y - 4z,\ x(0) = y(0) = z(0) = 1.$