Zestaw zadań – SZEREGI FOURIERA

1. Znajdź iloczyny skalarne, normy i odległości funkcji f_1, f_2 gdzie
a)$f_1, f_2 : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = e^x$
b) $f_1, f_2 : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = \sin(2x)$, $f_2(x) = \cos(2x)$.
2. Wykaż, że ciąg funkcyjny $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} : f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$ jest zbieżny przeciętnie z kwadratem w przedziale $[0,1]$ do funkcji
a)

$$f(x) = 0, \quad x \in [0,1]$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

c)

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ -1 & x = \frac{1}{2} \\ 0 & x \in (0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\} \end{cases}$$

Do której z tych funkcji ciąg funkcyjny $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ jest zbieżny punktowo w $[0,1]$?
3. Rozwiń w szereg trygonometryczny Fouriera funkcje dane wzorami:
i) $f(x) = \sin x - \sin 5x$, $x \in [-\pi, \pi]$,
ii) $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, korzystając z otrzymanego rozwinięcia oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$,
iii) $f(x) = \sin(ax)$, $x \in [-\pi, \pi]$, $a \notin \mathbf{Z}$,
iv)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x \le 0 \\ \sin x & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

v) $f(x) = e^x$, $x \in [-2, 2]$,
vi) $f(x) = 2x$, $x \in [0,1]$,
vii) $f(x) = |x+1|$, $x \in [-3, 1]$.
W przypadkach ii), iv), vi), vii) narysuj wykresy funkcji oraz wykresy sum ich szeregów Fouriera.
4. Rozwiń funkcję $f : [0,2] \ni x \mapsto (1 - |x-1|) \in \mathbf{R}$ w szereg a)sinusów, b)kosinusów. Narysuj wykres funkcji oraz wykresy sum jej szeregów Fouriera.