Zestaw zadań – SZEREGI POTĘGOWE

1. Dla jakich wartości x następujące szeregi są zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^2-3x+1)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \quad ?$$

2. Oblicz promień zbieżności i określ zbiór, w którym szereg jest zbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(2n-1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{10^n}x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x+1)^n}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n(2n+3)x^{2n}}{4^n}.$$

3. Określ zbiór, w którym szereg jest zbieżny. Znajdź sumę szeregu.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)4^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{5^n}x^{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2n+1)x^{2n}}{4^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

4. Określ zbiór, w którym szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

jest zbieżny i znajdź jego sumę. Korzystając z obliczonej sumy uzasadnij równość: $\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. Z jaką dokładnością obliczymy π jeśli weźmiemy sumę tylko pierwszych pięciu wyrazów?

5. Oblicz sumy szeregów liczbowych korzystając ze zbieżności odpowiednich szeregów potęgowych:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{4^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}.$$

6. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcje dane wzorami: e^{2x+1}, $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{7x+3}{(1-x)(4x+1)}$, $\frac{x^2}{4x+3}$, $\operatorname{arctg} x$, $\ln(1+x^2)$, $\ln(x^2+3x+2)$, $\frac{1}{(1+x)^2}$.

7. Rozwiń w szereg Taylora w otoczeniu punktu x_0 funkcje dane wzorami: $\frac{1}{1-x}$, $x_0=2$; $\frac{x+7}{2+x-x^2}$, $x_0=1$.

8. Oblicz całkę $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$ z dokładnością do $\frac{1}{100}$.