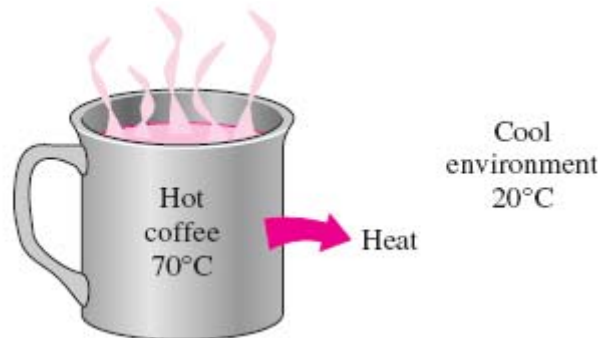


# Symulacja przepływu ciepła dla wybranych warunków badanego układu

## I. Część teoretyczna

Ciepło jest formą przekazywanej energii, która jest spowodowana różnicą temperatur (inną formą przekazywania energii jest praca).



Rysunek 1. Przepływ ciepła następuje w kierunku zmniejszania się temperatury.

Można wyróżnić trzy podstawowe mechanizmy transportu (wymiany) ciepła:

**PRZEWODZENIE** – Przekazywanie energii od jednej cząstki do drugiej, za pośrednictwem ruchu drgającego tych cząstek. Proces ten trwa dopóty, dopóki temperatura ciała nie zostanie wyrównana w całej rozpatrywanej objętości. Dotyczy to bezpośredniego kontaktu ciała z ciałem, części ciała z ciałem. dominuje w ciałach stałych (w metalach głównie poprzez gaz elektronowy, mogą być też drgania sieci).

**PROMIENIOWANIE** – przekazywanie ciepła w postaci energii promieniowania, którego natura jest taka sama jak energii świetlnej. Energia cieplna przekształca się w energię promieniowania, przebywa określoną przestrzeń z prędkością światła, aby w innym miejscu przekształcić się całkowicie lub częściowo w energię cieplną.

**KONWEKCJA (WNIKANIE)** – wiąże się z ruchem konwekcyjnym gazów lub cieczy, wywołanym bądź różnicą gęstości (różnicą temperatur), bądź przez wymuszenie czynnikami zewnętrznymi.

W przemyśle ruch ciepła zachodzi równocześnie dwoma lub trzema sposobami, najczęściej odbywa się przez **przewodzenie i konwekcję**. Mechanizm transportu ciepła łączący wymienione sposoby ruchu ciepła nazywa się **PRZENIKANIEM CIEPŁA**.

Podczas rozwiązywania zagadnień wymiany ciepła najczęściej stosujemy prawo addytywności, które zakłada niezależność ww. rodzajów wymiany ciepła.

Oznacza to, że obliczone ilości energii cieplnej związanych z przewodzeniem, unoszeniem i promieniowaniem niezależnie się sumuje.

## Podstawowe pojęcia:

**Pole temperatur** – zbiór wartości temperatur w poszczególnych punktach rozpatrywanej przestrzeni.

**Ustalona wymiana ciepła** – pole temperatur nie zmienia się w czasie.

$$T = f(x, y, z)$$

**Nieustalona wymiana ciepła** – pole temperatur zmienia się w czasie ( $\tau$ ) np. ogrzewanie lub chłodzenie stalowych elementów (hartowanie)

$$T = f(x, y, z, \tau)$$

W większości procesów po pewnym okresie nieustalanej wymiany ciepła układ dąży do stanu równowagi cieplnej, który charakteryzuje się stałym rozkładem temperatur

**Powierzchnia izotermiczna** – zbiór punktów w przestrzeni o jednakowych temperaturach.

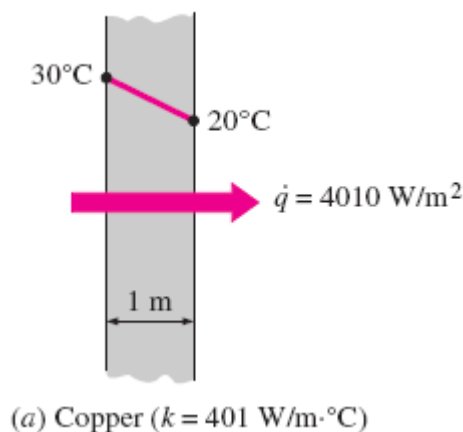
**Strumień ciepła (natężenie przepływu ciepła lub moc ciepła):**

$$\dot{q} = \frac{dq}{d\tau} \text{ [J/s]} = \text{[W]}$$

**Strumień ciepła** dla przypadku ustalonego (stosunek ciepła  $Q$  do czasu trwania wymiany tej ilości ciepła):

$$\dot{q} = \frac{q}{\tau} = \text{const.}$$

**Gęstość strumienia ciepła** – strumień odniesiony do jednostki powierzchni [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]. Gęstość strumienia ciepła jest wektorem skierowanym prostopadle do powierzchni izotermicznej w kierunku spadku temperatury.



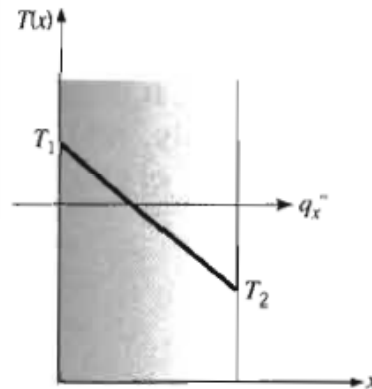
Rysunek 2. Gęstość strumienia ciepła jest wektorem skierowanym prostopadle do powierzchni izotermicznej w kierunku spadku temperatury.

## Wprowadzenie do przewodnictwa ciepła

### **Prawo Bio-Fouriera:**

„Wektor gęstości strumienia ciepła w przewodnictwie danego punktu ciała równomiernie nagrzanego, w danym momencie czasu – jest wprost proporcjonalny do wektora gradientu temperatury”.

dla przypadku 1D



$$q_x'' = \frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx}$$

Gdzie:

$q_x''$  – gęstość strumienia ciepła [ $W/m^2$ ] w kierunku x,

$q_x$  – strumień ciepła [W],

k – współczynnik proporcjonalności (wsp. przewodzenia ciepła) zależy od temperatury i jest podawany w literaturze dla określonego zakresu temperatur względnie ściśle określonej temperatury. Jest to dana materiałowa, cecha charakterystyczna ośrodka, substancji [ $W/(m \cdot K)$ ].

Podobnie dla innych kierunków:

$$q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y'' = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z'' = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

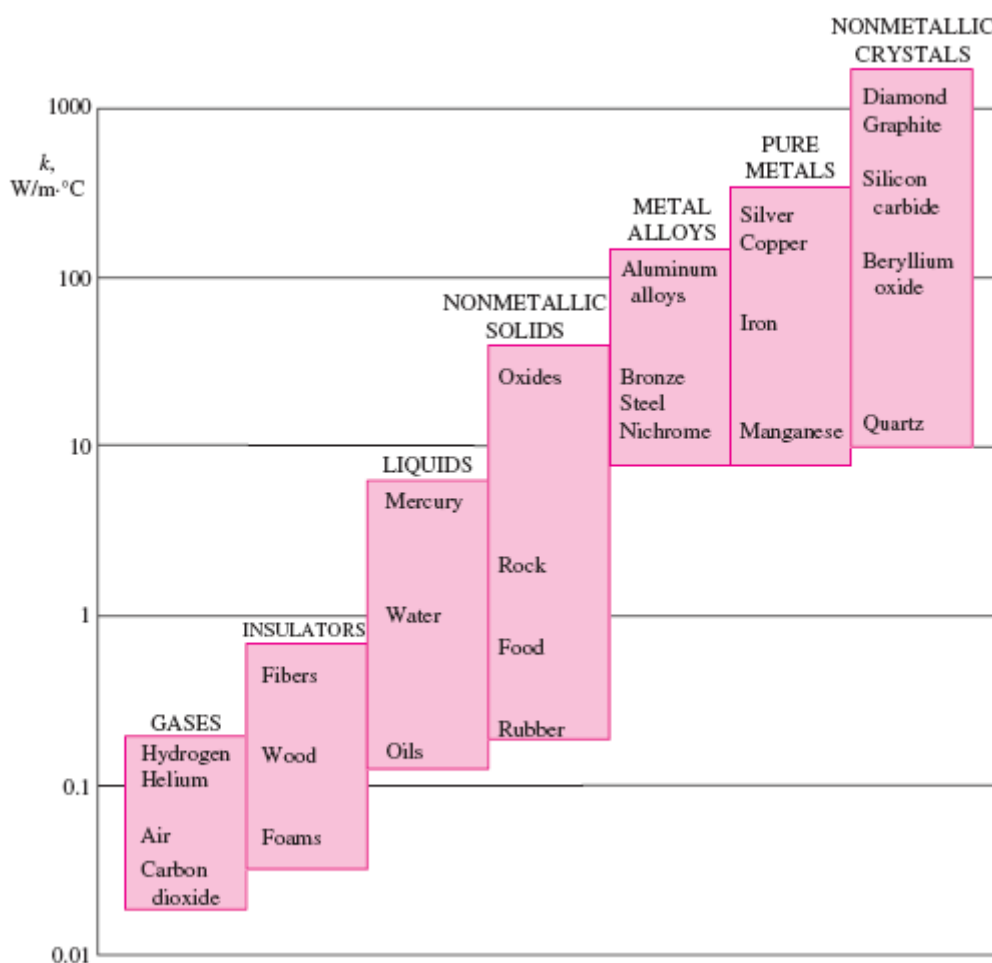
Tak więc ogólnie:

$$\vec{q} = -k \text{ grad } T \quad [W/m^2]$$

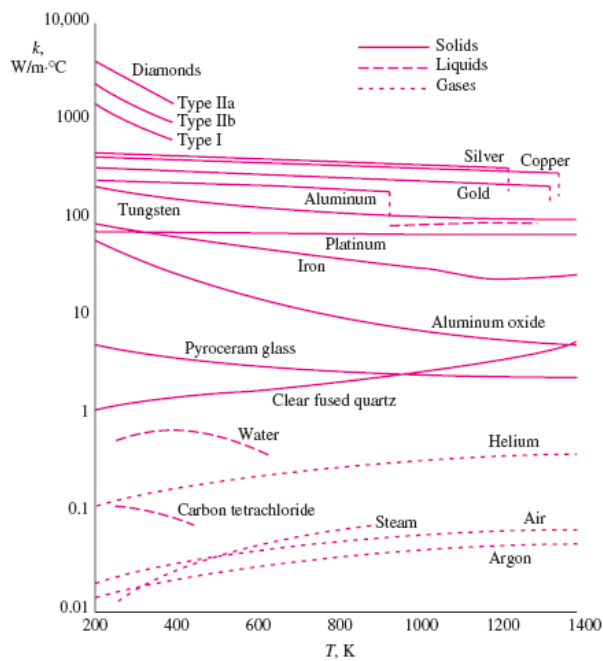
gdzie:  $\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$

Tabela 1. Wartości współczynnika przewodzenia ciepła (k) dla różnych materiałów (w temperaturze pokojowej)

Material	k, W/m · °C*
Diamond	2300
Silver	429
Copper	401
Gold	317
Aluminum	237
Iron	80.2
Mercury (l)	8.54
Glass	0.78
Brick	0.72
Water (l)	0.613
Human skin	0.37
Wood (oak)	0.17
Helium (g)	0.152
Soft rubber	0.13
Glass fiber	0.043
Air (g)	0.026
Urethane, rigid foam	0.026



Rysunek 3. Wartości współczynnika k, dla różnych materiałów

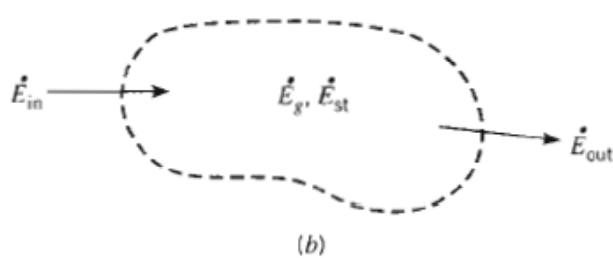


Rysunek 4. Zależność współczynnika  $k$  od temperatury.

## Równanie przewodzenia ciepła

Pozwala na wyznaczenie pola temperatur w ciele.

Wyprowadzając równanie przewodzenia ciepła skorzystamy z zasady zachowania energii.



Rysunek 5. Zasada zachowania energii

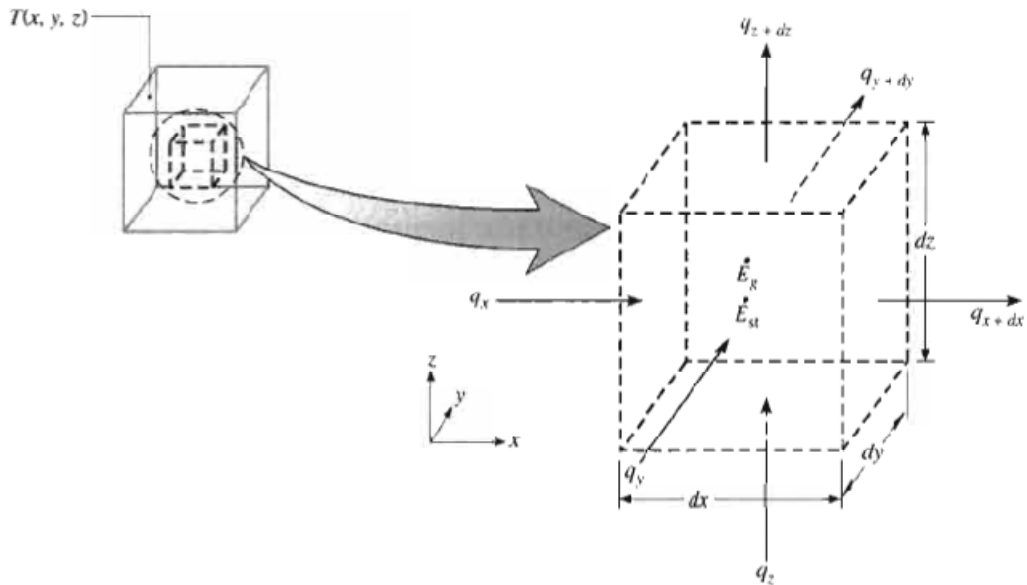
$\dot{E}_{in}$  – energia dostarczona do objętości kontrolnej,

$\dot{E}_{out}$  – energia opuszczająca objętość kontrolną,

$\dot{E}_g$  – energia wygenerowana (jądrowa, reakcja chemiczna itp.),

$\dot{E}_{st}$  – energia zmagazynowana.

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \dot{E}_{st} \tag{1}$$



Rysunek 6. Jednostkowa objętość

Ilość ciepła wchodząca i wychodząca z jednostkowej objętości można rozpatrywać osobno dla każdego kierunku x,y,z. Aby wyznaczyć  $q_{x+dx}$  możemy wyrażenie rozwinąć w szereg Taylora pomijając wyrazy wyższego rzędu. Tak więc dla każdego kierunku x,y,z zachodzi:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (2)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (3)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (4)$$

Wracając do równania zachowania energii

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \dot{E}_{st}$$

Gdzie:

$$\dot{E}_{in} = q_x + q_y + q_z \quad (5)$$

$$\dot{E}_{out} = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz} \quad (6)$$

$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz, \quad \dot{q} - \text{ilość energii wygenerowanej na jednostkę objętości [W/m^3],} \quad (7)$$

$$\dot{E}_{st} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} dx dy dz \quad (8)$$

Wstawiając do (1) zależności (5), (6), (7), (8) otrzymamy:

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q} dx dy dz - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} dx dy dz \quad (9)$$

Podstawiając za  $q_{x+dx}$ ,  $q_{y+dy}$ ,  $q_{y+dy} + q_{z+dz}$  zależności (2), (3), (4) otrzymamy:

$$\dot{q} dx dy dz + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} dx dy dz \quad (10)$$

Korzystając z prawa Fouriera możemy za  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$  podstawić odpowiednio:

$$q_x = -k dy dz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (11)$$

$$q_y = -k dx dz \frac{\partial T}{\partial y} \quad (12)$$

$$q_z = -k dx dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (13)$$

Wstawiając te zależności do równania (10) otrzymamy **równanie na przewodzenie ciepła**:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (14)$$

Gdzie:

$x, y, z$  – współrzędne,

$k$  – współczynnik przewodnictwa [W/m\*K],

$T$  – temperatura [K],

$\dot{q}$  – wewnętrzne źródło ciepła [W/m<sup>3</sup>],

$\rho$  – gęstość [kg/m<sup>3</sup>],

$c_p$  – pojemność cieplna [J/kg\*K],

$\tau$  – czas [s].

Zakładając ciało izotropowe  $k = \text{const}$ . Otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

Gdzie:

$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$  – dyfuzyjność cieplna

Otrzymane równanie pozwala na wyliczenie rozkładu temperatur (zależne od czasu).

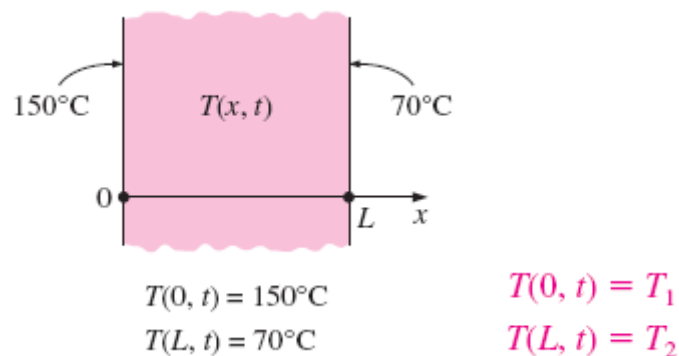
Aby rozwiązać to równanie różniczkowe, potrzebne są warunki brzegowe dla każdej współrzędnej, oraz w przypadku rozwiązywania zagadnienia z czasem warunki początkowe.

## Warunki brzegowe

**Warunek początkowy** definiuje stan układu w chwili początkowej. Stan musi być znany w każdym punkcie przestrzennym.

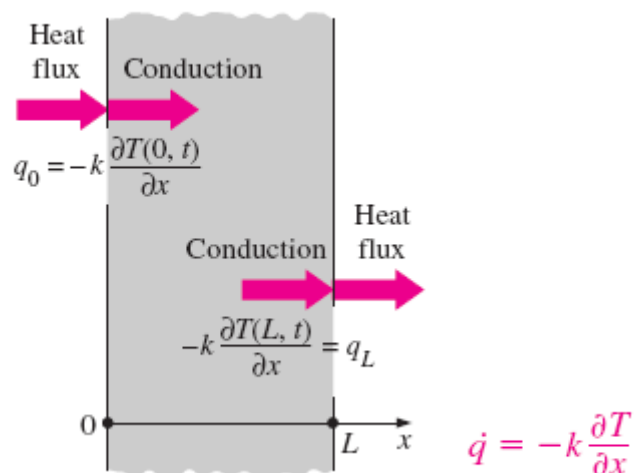
**Warunki brzegowe** opisują zachowanie się funkcji **na brzegu obszaru**. Wyróżnia się trzy rodzaje warunków brzegowych :

*warunek brzegowy pierwszego rodzaju (DIRICHLETA)* – znany jest rozkład temperatury we wszystkich punktach powierzchni ciała ( $T_s$ ).



Rysunek 7. Przykład warunku brzegowego I rodzaju

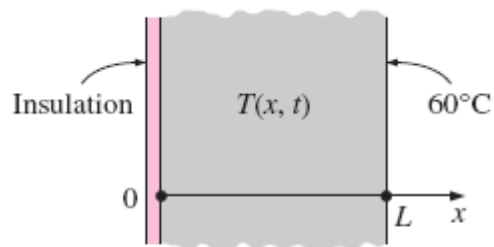
*warunki brzegowe drugiego rodzaju (NEUMANA)* – znany jest rozkład gęstości strumieni ciepła  $q$ , we wszystkich punktach powierzchni ciała, nie znana jest temperatura ścianki  $T_s$ , inaczej mówiąc znany jest strumień na powierzchni (Prawo Fouriera).



Rysunek 8. Przykład warunku brzegowego II rodzaju.



Przypadek specjalny: izolowana powierzchnia:

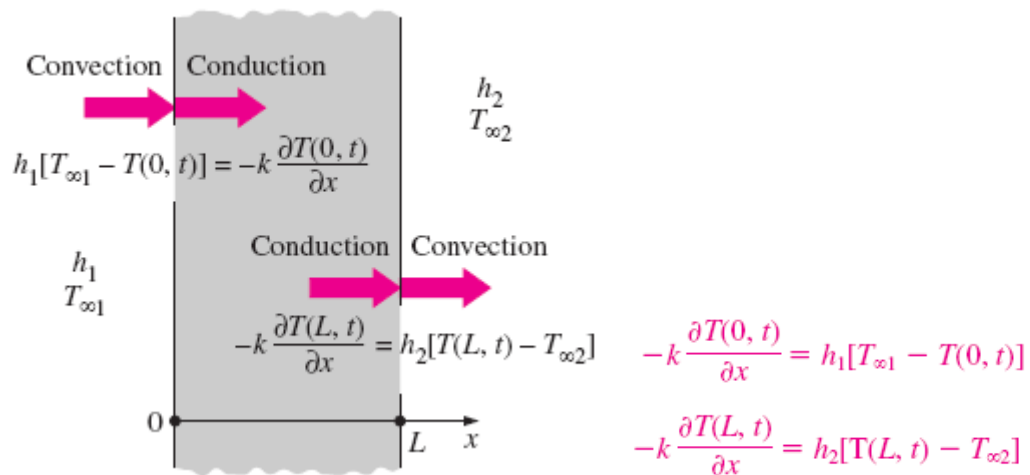


$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0$$

$$T(L, t) = 60^\circ\text{C}$$

Rysunek 9. Specjalny przypadek warunku II rodzaju

**warunki brzegowe trzeciego rodzaju** – dana jest temperatura płynu  $T_p$  otaczającego ciało stałe oraz współczynnik przyjmowania ciepła, nie znana jest temperatura powierzchni ścianki  $T_s$ , (konwekcja).

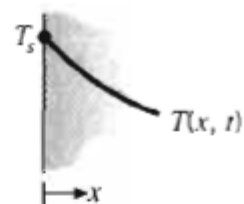


Rysunek 10. Warunek brzegowy III rodzaju

1. Stała temperatura powierzchni

1.

$$T(0, t) = T_s$$

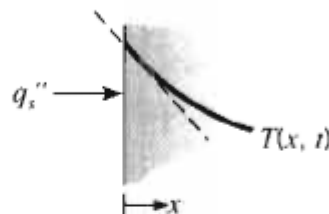


2. Stały strumień na powierzchni

2.

(a)

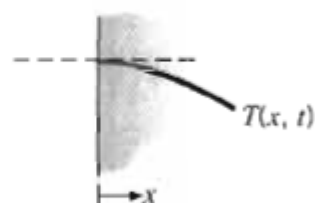
$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_s''$$



Adiabatyczna lub izolowana powierzchnia

(b)

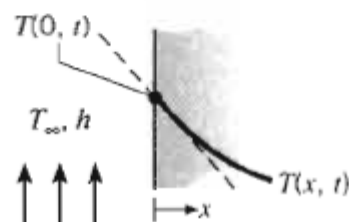
$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$



3. Konwekcja na powierzchni

3.

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)]$$



Rysunek 11. Geometryczna interpretacja warunków brzegowych

## II. Cel ćwiczenia

„Rozwiązanie numeryczne równania różniczkowego na przewodzenie ciepła.”

Wśród metod wykorzystywanych do numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych wyróżnia się trzy grupy metod. Są to:

- metoda różnic skończonych (ang. *Finite Differences*)
- metoda elementów skończonych (ang. *Finite Element Method*)
- metoda objętości skończonych (ang. *Finite Volume Method*)

Metody te różnią się między sobą dość znacznie, natomiast mają wspólną cechę polegającą na tym, że mogą zostać zdefiniowane w oparciu o dyskretyzację obszaru. Dyskretyzacja, inaczej mówiąc podział obszaru na siatkę obliczeniową (siatkę dyskretyzacji), ang. *mesh, grid*) jest bazą, w oparciu o którą konstruuje się dyskretne odpowiednik oryginalnego równania. W zależności od metody uzyskuje się różne sformułowania dyskretne, różne są też wymagania związane z dyskretyzacją – natomiast tym co łączy jest fakt, że dyskretyzacja oznacza podział obszaru obliczeniowego na ‘małe’ podobszary. Określenia ‘dyskretyzacja’, ‘dyskretne rozwiązanie’, ‘dyskretne rozwiązanie’ podkreślają fakt odejścia od oryginalnego równania oraz jego dokładnego rozwiązywania na rzecz wyznaczenia rozwiązania przybliżonego w skończonej liczbie punktów. **Dyskretyzacja ma ogromny wpływ na jakość rozwiązania przybliżonego.** W przypadku korzystania z gotowych kodów komputerowych, to właśnie dyskretyzacja obszaru stanowi jedno z głównych zadań osoby korzystającej z modelu. W przypadku zadań o złożonej geometrii, nawet z pomocą specjalnego oprogramowania, może być to zadaniem bardzo pracochłonnym.

Dla bardzo ograniczonej klasy zagadnień istnieją rozwiązania analityczne. Najczęściej mogą być one otrzymane przy wielu założeniach upraszczających dotyczących regularnego kształtu obszaru, ‘prostych’ warunków brzegowych, założenia o jednorodności, rozważaniu zadania jednowymiarowego. Bez względu na te ograniczenia ewentualna możliwość odwołania się o rozwiązania analityczne jest bardzo cenna w procesie weryfikacji rozwiązania przybliżonego.

## Podstawy metody różnic skończonych

Istota tej metody polega na zamianie operatorów różniczkowych na odpowiednie operatory różnicowe, określone na dyskretym zbiorze punktów izolowanych; zbiór ten nazywamy **siatką**, a jego elementy **węzłami**. Dzięki takiej aproksymacji funkcji i jej pochodnych, wyjściowe zagadnienie brzegowe zostaje sprowadzone do układu równań algebraicznych, w których niewiadomymi są dyskretne wartości funkcji

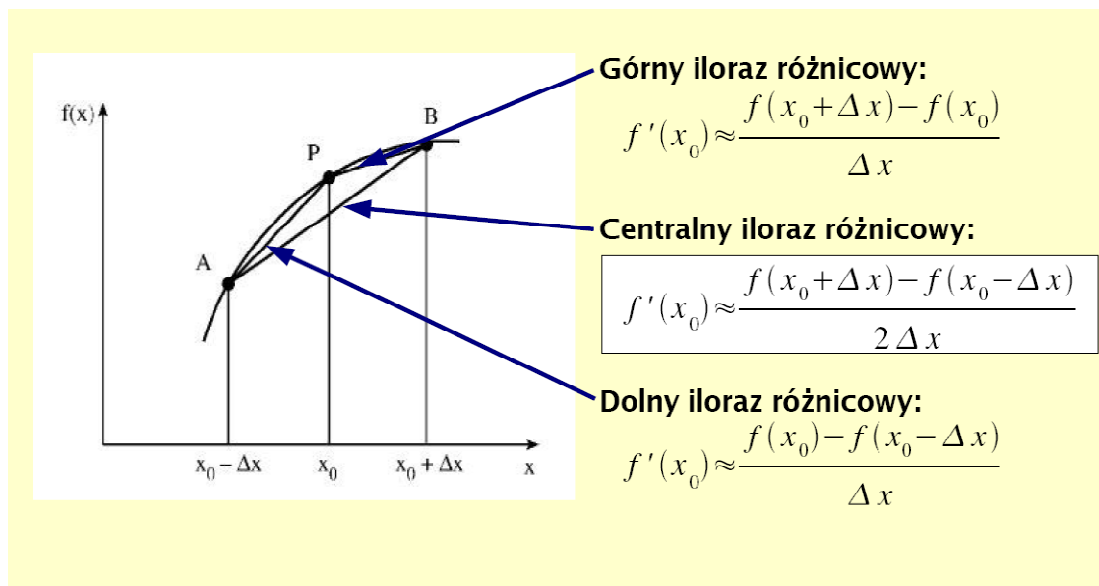
### Dyskretyzacja (podział obszaru) :

W przypadku zadań jednowymiarowych bez względu na stosowaną metodę numeryczną wybór jest niewielki: obszar obliczeniowy, jakim w przypadku 1D jest odcinek, dzieli się na małe odcinki. Różnice pojawiają się w zadaniach dwu- i trójwymiarowych. Metoda różnic skończonych wyróżnia się wśród pozostałych metod stosunkowo małą elastycznością dopuszczalnych dyskretyzacji. W 2D elementami (w kontekście metody różnic skończonych często mówi się o **komórkach** (ang. *cell*) są prostokąty, zaś w przypadku 3D – sześciokąty. Ten wymóg regularności sprawia, że odwzorowanie obszarów o złożonym kształcie nie jest sprawą prostą.

### Zastąpieniu pochodnych występujących w równaniu ich dyskretnymi odpowiednikami, nazywanymi ilorazami różnicowymi :

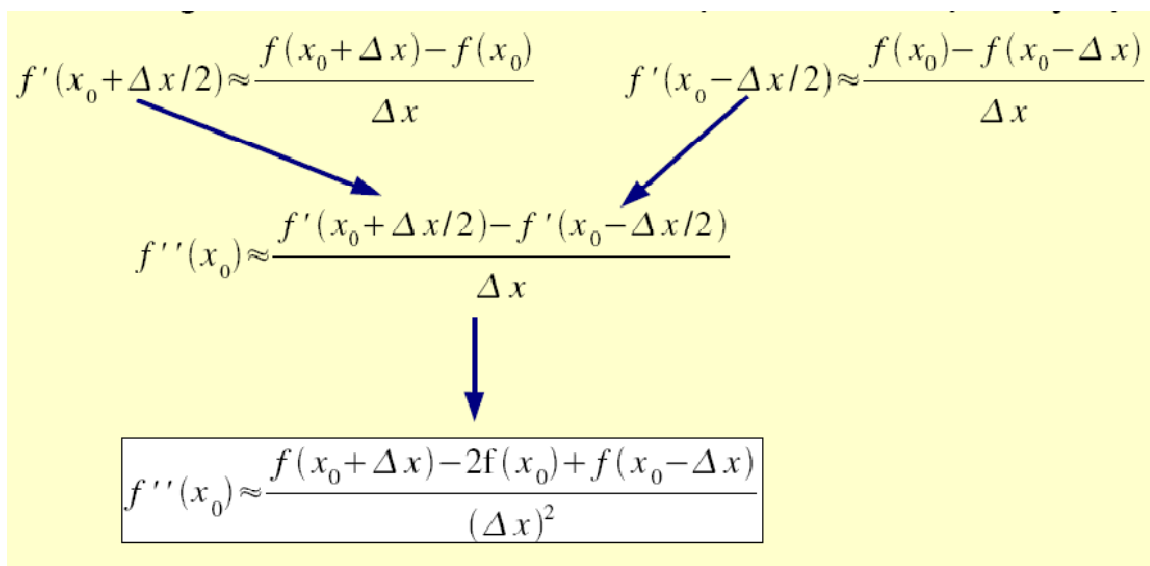
Pochodne zamieniamy na różnice.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2 \Delta x}$$



Rysunek 12. Sposób konstruowania ilorazów różnicowych

Pochodne wyższego rzędu (np.  $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ ), uzyskujemy wykorzystując ilorazy na pochodne niższych rzędów.



Rysunek 13. Konstruowanie ilorazów różnicowych wyższego stopnia

Jak to się ma do przewodzenia ciepła??

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

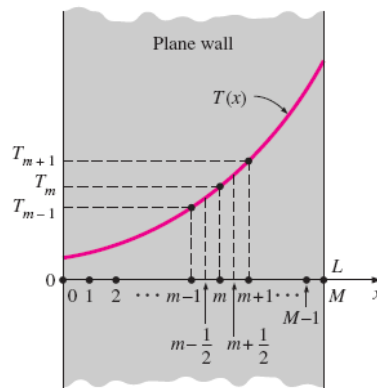
Dla przypadku stacjonarnego przypadku 1D powyższe równanie ma postać:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

Wstawiając ilorazy różnicowe otrzymujemy:

$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2} + \frac{\dot{g}_m}{k} = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M-1$$

Gdzie m to jest numer kolejnego węzła.

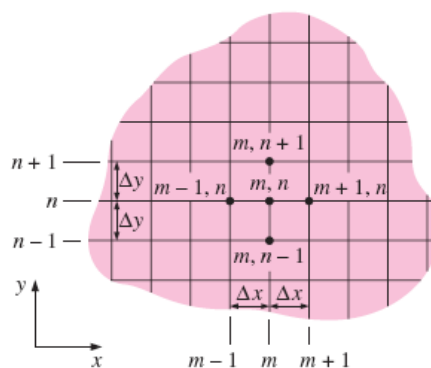


Rysunek 14. Schemat formułowania równań przy użyciu metody różnic skończonych

Tak więc aby wyliczyć temperaturę w punkcie  $m = 1$ , należy znać jej wartość w punkcie  $m = 0$  (w brzegowy) oraz w  $m = 2$ . Analogicznie aby obliczyć temperaturę w punkcie  $m = 2$ , wykorzystujemy wartości w punkcie  $m = 1$  i  $m = 3$ . Znając warunek brzegowy w  $m = M$  i  $m = 0$ , otrzymamy tyle równań co niewiadomych a zatem możemy obliczyć temperaturę we wszystkich węzłach.

Podobnie dla przypadku 2D:

$$\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{g}_{m,n}}{k} = 0$$



Rysunek 15. Obliczanie temperatury w węzłach dla przypadku 2D.

### III. Przebieg ćwiczenia

Warunki rozpatrywanego układu (geometria, warunki brzegowe i początkowe, ilość węzłów) zostaną podane przez prowadzącego ćwiczenie. Obliczenia temperatury w zadanych punktach węzłowych należy przeprowadzić w programie Microsoft Excel.

### IV. Opracowanie wyników

W sprawozdaniu należy umieścić, krótki wstęp teoretyczny, oraz w formie graficznej (tabele, wykresy), wyniki wykonanych obliczeń. Należy zamieścić zależność temperatury od geometrii (wymiar  $x$  (1D),  $x,y$  (2D) oraz od czasu (w przypadku zaganień niestacjonarnych).

#### Literatura:

1. *Fundamentals of heat and mass transfer*, Frank P. Incropera, David P. DeWitt; New York : John Wiley & Sons, 2001. ,
2. *Wymiana ciepła*, Stefan Wiśniewski, Tomasz S. Wiśniewski ; Warszawa Wydaw. Naukowo Techniczne, 1994.,
3. *Wymiana ciepła*, Senkara Tadeusz; Kraków AGH, 1970.