Powrót do starych przykładów:

$a \geq b > 0$

$$Ob = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + (b^2 - a^2)\cos^2 t}\, dt$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t}\, dt = \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} - t \\ t = \frac{\pi}{2} - \theta \end{cases}$$

$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\theta}\, d\theta$$

Ostatecznie

$$Ob = 4a\, E\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$$

---

Funkcja gamma (Eulera)

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

np. $$\Gamma(0) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt = +\infty$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 1$$

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty \overset{\int}{e^{-t}}\,\overset{-f'}{t}\,dt = \underbrace{-te^{-t}\Big|_0^\infty}_{=0} + \underbrace{\int_0^\infty e^{-t}\,dt}_{=\Gamma(1)=1}$$

$$\int -e^{-t} \quad -1$$

Ogólnie

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty \overset{\int}{e^{-t}}\,\overset{-f'}{t^x}\,dt = -xt^{x-1}e^{-t}\Big|_0^\infty = 0$$

$$-e^{-t} \quad -xt^{x-1} \qquad +x\underbrace{\boxed{\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt}}_{=\Gamma(x)}$$

Ostatecznie

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Mamy zatem

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Ale

$$\Gamma: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ jest ciągła!}$$

---

Policzmy $\frac{d}{dx}\Gamma(x)$

Pochodna funkcji podcałkowej

$$\frac{d}{dx} e^{-t} t^x \frac{1}{t} = e^{-t}\frac{1}{t}\ln t\, t^x = \ln t\, e^{-t} t^{x-1}$$

Zatem

$$\frac{d}{dx}\Gamma(x) = \int_0^\infty \ln t\, e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

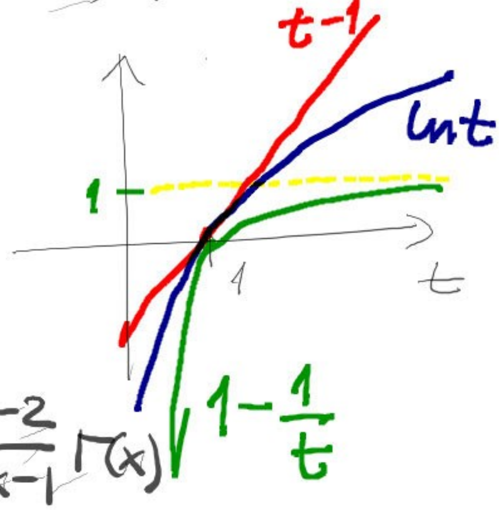
Całka jest zbieżna, gdyż $\lim_{t\to\infty} \ln t\, e^{-t} t^{x-1} = 0$ i czynnik $e^{-t}$ daje zbieżność w $+\infty$. Ponadto $\lim_{t\to 0} t^{x-1} \ln t = 0$ dla $x > 1$. Dodatkowo całka $\int_0^1 t^\alpha \, dt$ istnieje dla $\alpha > -1$

---

Całka $\int \ln t\, e^{-t} t^{x-1} dt$ również nie jest elementarna, ale można zobaczyć ciekawe rzeczy. Np $\ln t \le t-1$. zatem

$$\frac{d}{dx}\Gamma(x) \le \int_0^\infty (t-1) e^{-t} t^{x-1} dt = \Gamma(x+1) - \Gamma(x)$$

Zatem $\frac{d}{dx}\Gamma(x) \le (x-1)\Gamma(x)$. Podobnie




$\ln t \ge 1 - \frac{1}{t}$. stąd

$$\frac{d}{dx}\Gamma(x) \ge \Gamma(x) - \Gamma(x-1)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)\Gamma(x) = \frac{x-2}{x-1}\Gamma(x)$$

Ostatecznie

$$\frac{x-2}{x-1}\Gamma(x) \le \frac{d}{dx}\Gamma(x) \le (x-1)\Gamma(x)$$

Jak poprawić oszacowanie po prawej stronie?

Można wykorzystać np.

$$\alpha \ln t = \ln t^\alpha \le t^\alpha - 1$$

(dla $\alpha > 0$)