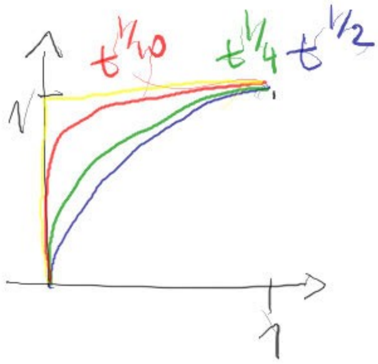
Zad 1. $f \in C[0,1]$. Obliczyć granicę

$$L = \lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\,dx$$

WLOG (= without loss of generality)
bez straty ogólności

$$L = \lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x)\,dx = \begin{cases} x^{n+1} = t \\ dt = (n+1)x^n\,dx \end{cases}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f\left(t^{\frac{1}{n+1}}\right) dt = \int_0^1 f(1)\,dt = f(1)$$



Ustalam $\varepsilon > 0$. Istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $x > 1-\delta$ mamy $|f(1) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Niech dalej $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = M$. Oznaczam $t_0 = \frac{\varepsilon}{4M}$. Istnieje zatem n_0 takie, że dla $n \geq n_0$ $t_0^{\frac{1}{n+1}} > 1-\delta$. Teraz

$$\left| f(1) - \int_0^1 f\left(t^{\frac{1}{n+1}}\right) dt \right| = \left| \int_0^1 \left(f(1) - f\left(t^{\frac{1}{n+1}}\right)\right) dt \right|$$

$$\leq \left| \int_0^{t_0} \left(f(1) - f\left(t^{\frac{1}{n+1}}\right)\right) dt \right| + \left| \int_{t_0}^1 \left(f(1) - f\left(t^{\frac{1}{n+1}}\right)\right) dt \right|$$

$$\leq \int_0^{t_0} 2 \overbrace{\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|}^{M} \, dt + \int_{t_0}^{1} \left| f(1) - f\left(t^{\frac{1}{n+1}}\right) \right| dt$$

$$1 \geq t^{\frac{1}{n+1}} \geq t_0^{\frac{1}{n+1}} > 1-\delta$$

$$< 2Mt_0 + \int_{t_0}^{1} \frac{\varepsilon}{2} \, dt < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\delta < \varepsilon.$$

#

Zad 1'. $f \in [0,1]$. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{\frac{1-n}{n}} f(x)\,dx$$

Zad 2 $f \in C^2(\mathbb{R})$. Pokazać, że

$$\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|\right)^2 \leq 4 \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\right)\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|\right)$$

Oznaczmy $A = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, $B = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$

Ze wzoru Taylora mamy

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi(x))}{2} h^2$$

$$|f'(x)h| \leq |f(x+h)| + |f(x)| + |f''(\xi(x))| \frac{h^2}{2}$$

$$\leq 2A + B\frac{h^2}{2}$$

Zatem $$|f'(x)| \leq \frac{2}{|h|}A + \frac{|h|}{2}B$$

Bierzemy $$|h| = 2\sqrt{\frac{A}{B}}.$$ Wówczas

$$|f'(x)| \leq \sqrt{AB} + \sqrt{AB} = 2\sqrt{AB}$$

Stąd

$$\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|\right)^2 \leq 4AB.$$

\#

Zad 3. Obliczyć $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots$

Jak pokazać $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots = 2^n$?

—— || —— $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

$$= f(1), \quad f(x) = \frac{1}{2}\left[(1+x)^n - (1-x)^n\right]$$

Mamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Szukamy funkcji $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x)$, gdzie $\{\phi_n\}$ jest pewną rodziną funkcji; np. jednomiany x^n (rozwinięcie f w szereg potęgowy), f-cje trygonometryczne (szereg Fouriera). Przy dodatkowym warunku $\forall_n \phi_n(x_0)=1$ otrzymujemy wartość sumy szeregu $f(x_0)$.

Funkcję f nazywamy <u>funkcją tworzącą</u>.

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{3k}x^k$$

$1, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ - trzy różne pierwiastki z 1 trzeciego stopnia.

$$1^k+\varepsilon_1^k+\varepsilon_2^k=\begin{cases}3, & 3|k\\ 0, & \neg\end{cases}$$

(w przeciwnym przypadku)

$$g(x)=\frac{1}{3}\left[(1+x)^n+(1+\varepsilon_1 x)^n+(1+\varepsilon_2 x)^n\right].$$

Suma szeregu jest równa $g(1)$

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g(1) = \frac{1}{3}\left[2^n + \underbrace{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}_{2\cos\frac{n\pi}{3}}\right]$$

Zad 5. Obliczyć

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n}{k} = ?$$

Szukamy $f(x) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n}{k} x^k$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} = x(1+x)^n$$

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(x(1+x)^n\right) = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1}$$

$$f(1) = 2^n + n2^{n-1} = (n+2)2^{n-1}$$

Zad 4 (lemat Riemanna-Lebesgue'a)

$f \in C[0,1]$. Pokazać (Obliczyć)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,dx = 0$$

WLOG $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, okresowa o okresie 1 $(\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x))$ Przyjmujemy $\tilde{f}(n) = f(0)$

Oczywiście $\int_0^1 \tilde{f}(x)\sin(2\pi n x)\,dx = \int_0^1 f(x)\sin 2\pi n x\,dx$

i $\tilde{f}$ jest prawostronnie ciągła w 0.

$$I = \int_0^1 \tilde{f}(x)\sin(2\pi n x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = t + \frac{1}{2n} \\ dx = dt \end{array} \right\}$$

$$= \int_{-\frac{1}{2n}}^{1-\frac{1}{2n}} \underbrace{\tilde{f}\left(t+\frac{1}{2n}\right)\overbrace{\sin(2\pi n t + \pi)}^{-\sin 2\pi n t}}_{\text{okresowa o okresie 1}}\,dt$$

$$= -\int_0^1 \tilde{f}\left(t+\frac{1}{2n}\right)\sin(2\pi n t)\,dt.$$

Z jednostajnej ciągłości f wiemy, że istnieje n_0 takie, że dla $n > n_0$ mamy

$-\varepsilon < f(x) - f(x+\frac{1}{2n}) < \varepsilon$ (dla ustalonego wcześniej $\varepsilon > 0$)

(Oczywiście $x \in [0, 1-\frac{1}{2n}]$)

Zatem

$$I = -I \pm \varepsilon + \int_{1-\frac{1}{2n}}^{1} \left| f(x) - \tilde{f}(x+\tfrac{1}{2n}) \right| dx$$

W granicy otrzymujemy $\quad 0$

$I = -I$, czyli $I = 0$.

Zadanie z domami.

W pewnej miejscowości matematyk mieszka (na długiej ulicy) w domu o tej własności, że suma numerów mniejszych jest sumie numerów większych wszystkich domów na tej ulicy. Gdzie mieszka matematyk, jeśli wiemy, że domów jest więcej niż 50, a mniej niż 500?

n – liczba wszystkich domów

m – dom matematyka

$$\sum_{k=0}^{m-1} k = \sum_{k=m+1}^{n} k$$

$$\frac{m(m-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(n^2+n-m^2-m)$$

$$2m^2 = n^2+n+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$$1 = (2n+1)^2 - 2(2m)^2$$

Szukamy rozwiązania r-nia $\boxed{1 = x^2 - 2y^2}$ (r-nie Pell'a). Rozwiązania x, y dają kolejne przybliżenia $\sqrt{2} \sim \frac{x}{y}$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$$

kolejne przybliżenia:

$$1=\frac{1}{1},\ 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\ 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{7}{5},\ 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{17}{12}$$

$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=\frac{41}{29},\ \ldots=\frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \frac{577}{408}$$

$2n+1$	$2m$	n,	m
3	2	1	1
17	12	8	6
99	70	49	35
577	408	288	204

Równanie Pella $1=x^2-2y^2$

Ogólna postać

$$1=x^2-ny^2$$

Kolejne rozwiązania spełniają

$$x_k+\sqrt{n}\,y_k=(x_1+\sqrt{n}\,y_1)^k$$