

1. Oblicz całki:

a) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, gdzie D jest ograniczony krzywymi: $y = \frac{1}{x}$, $y = x$ oraz $x = 2$.

b) $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dx dy$,

c) $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2} dx dy$, gdzie D jest ograniczony krzywą $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

d) $\iiint_V (x^2+y^2) dv$, gdzie $a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2$, $z \geq 0$

e) $\int_0^{2a} dx \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dz$,

2. a) Znaleźć środek ciężkości jednorodnej figury ograniczonej krzywymi: $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.

b) Znaleźć moment bezwładności jednorodnego kwadratu o boku a i masie M względem wierzchołka.

3. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $x^2 + y^2 = z^2$ ($z^2 \geq x^2 + y^2$), b) $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.

4. Znaleźć współrzędne środka ciężkości jednorodnej części kuli: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

5. Oblicz $\int_K ye^{-x} dl$, gdzie $K : x = \ln(1+t^2)$, $y = 2\arctgt - t + 3$, $t \in [0, 1]$.

6. Wyznacz środek ciężkości części jednorodnej asteroidy: $x = R \cos^3 t$, $y = R \sin^3 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

7. Oblicz $\int_{\overline{AB}} (x^2 - 2xy) dx + (2xy + y^2) dy$, gdzie \overline{AB} jest łukiem paraboli $y^2 = x$ od $A(1, 1)$ do $B(4, 2)$.

8. Oblicz $\int_K (2a - y) dx + x dy$, gdzie K jest pierwszym łukiem cycloidy w kierunku zgodnym ze wzrostem parametru t .

9. Oblicz $\int_K (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$, gdzie $K : x^2 + y^2 = ax$, zorientowana dodatnio.

10. Oblicz $\int_K \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy$, gdzie K jest brzegiem obszaru

$D = \{(x, y) \in R^2 : x \in [1, e], 0 \leq y \leq \ln x\}$.

11. Oblicz $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} (1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}) dx + (\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}) dy$.