1. Oblicz granicę ciągu $x_n = (\frac{n^2\cos(n!)}{n^3+2n}, (1+\frac{1}{n})^{2n-3}, \sqrt{4n^2+3n-2}-2n)$.
2. Oblicz granicę a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$, b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$
3. Zbadaj ciągłość w całej dziedzinie funkcji $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$
4. Pokaż, że w punkcie $(0,0)$ funkcja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ ma pochodne kierunkowe w dowolnym kierunku ale nie jest różniczkowalna w tym punkcie.
5. Pokaż, że funkcja $f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy\neq 0 \\ 1, & xy=0 \end{cases}$ ma obie pochodne cząstkowe w punkcie $(0,0)$ a nie jest nawet ciągła w tym punkcie.
6. Zbadaj różniczkowalność w całej dziedzinie funkcji:
a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$
7. Oblicz pochodną wzdłuż wektora $h=(3,-1)$ funkcji $f(x,y)=x^4+y^4+2xy+1$ w punkcie $x_0=(1,2)$.
8. Oblicz pochodną kierunkową w kierunku wektora $h=(1,2,2)$ funkcji $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$ w punkcie $x_0=(-2,1,2)$.
9. Oblicz przybliżoną wartość $\frac{(1{,}03)^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05}}}$
10. Wyznacz równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x,y)=\mathrm{arctg}(\frac{y}{x})$ w punkcie $(1,1)$.
11. Wyznacz macierz Jacobiego i jakobian odwzorowania $(r,\psi,\varphi)\to(x(r,\psi,\varphi), y(r,\psi,\varphi), z(r,\psi,\varphi))$, gdzie $x=r\sin\psi\cos\varphi$, $y=r\sin\psi\sin\varphi$, $z=r\cos\psi$.
12. Sprawdź, czy funkcja $f(x,y)=e^{x+y}$ jest dwukrotnie różniczkowalna w $\mathbb{R}^2$. Jeśli tak, to oblicz różniczkę zupełną 2–go rzędu d^2f.
13. Dana jest funkcja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$
Sprawdź, czy pochodne mieszane tej funkcji w punkcie $(0,0)$ są sobie równe.
14. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji: a) $f(x,y)=x^3-2y^3-3x+6y$, b) $f(x,y)=x^3-2x^2y^2+y^4$, c) $f(x,y,z)=\frac{2x^2}{y}+\frac{y^2}{z}-4x+2z^2$.
15. Wyznacz, korzystając z metody Lagrange'a, ekstrema warunkowe funkcji: a) $f(x,y)=x+y$ przy warunku $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1$, b) $f(x,y,z)=x+y+2z$ przy warunku $x^2+y^2+z^2=1$.
16. Wyznacz wartość największą i najmniejszą osiąganą przez funkcję:
a) $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ na trójkącie o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(0,6)$ b) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ na kuli $x^2+y^2+z^2\leqslant 100$.
17. Liczbę dodatnią a przedstaw w postaci sumy takich trzech składników dodatnich, aby ich iloczyn był największy.
18. Pokaż, że równanie $x^2-xy+y^2-1=0$ określa funkcję uwikłaną $y=y(x)$ w otoczeniu punktu $(1,0)$. Oblicz $y'(1)$. Wyznacz wzór funkcji $y(x)$.
19. Oblicz pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanej $y=y(x)$ danej równaniem $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.
20. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y=y(x)$ danej równaniem: a) $x^4+y^2-4xy=0$,
b) $xy^2-x^2y=2a^3$, gdzie a jest parametrem.
21. Oblicz pochodną $z'(t)$ funkcji złożonej $z=e^{x-2y}$, gdzie $x=\sin t$, $y=t^3$.
22. Oblicz pochodne cząstkowe z'_u i z'_v funkcji złożonej $z=x^2y-xy^2$, gdzie $x=u+v$, $y=u-v$.
23. Rozwiąż równanie różniczkowe cząstkowe $yz'_x-xz'_y=0$, gdzie $z=z(x,y)$, przyjmując nowe zmienne $u=x$, $v=x^2+y^2$.