

Akademia Górniczo-Hutnicza im. St. Staszica w Krakowie

Różnorodność zmiennych zregionalizowanych kąto- wych ciągłych

Na podstawie statystycznych miar zmienności wartości pikseli

Tomasz Bartuś

Wyłącznie do użytku wewnętrznego AGH

<http://home.agh.edu.pl/bartus>
07.11.2025 13:08:00

Wstęp

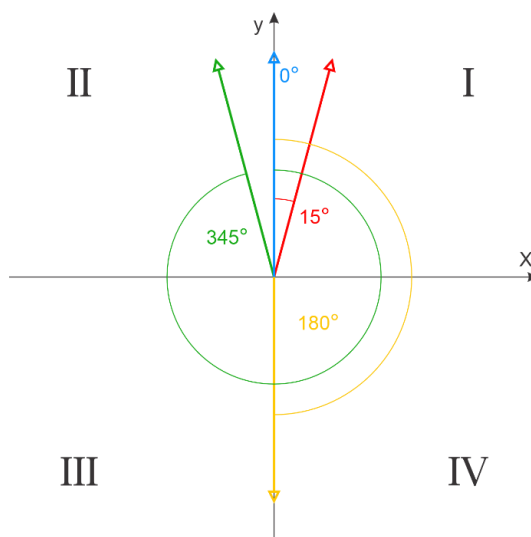
W tym dokumencie zostanie przedstawiona procedura generowania miar zmienności wartości pikseli w polach podstawowych siatki analitycznej dla **kątowych zmiennych zregionalizowanych ciągłych**. Przykładem takiej zmiennej jest *Aspect*, czyli ekspozycja stoków. W przypadku podobnych kryteriów analizy morforóżnorodności sposób postępowania będzie analogiczny.

Ćwiczenie wymaga oprogramowania ArcGIS Pro.

1. Kątowe miary zmienności

Miary cyrkularne (kątowe) odnoszą się do zjawisk okresowych i opisywanych na okręgu, takich jak kierunek, azymut czy faza. W ich przypadku wartości liczbowe „zawijają się” – 0° i 360° oznaczają ten sam kierunek (np. dla kryterium *Aspect* będzie to kierunek północny – N).

Dlaczego w przypadku zmiennych kątowych nie możemy stosować miar skalarnych? Załóżmy, że rozpatrujemy jakąś zmienną zregionalizowaną wyrażoną wartościami kątowymi zmieniającymi się w przedziale $<0^\circ; 360^\circ>$ (np. *Aspect*). Załóżmy, że rozpatrujemy dwa obiekty (np. piksele) dane wartościami azymutów: 15° i 345° (ich wektory znajdują się w I i II ćwiartce układu współrzędnych) (**Ryc. 1**).



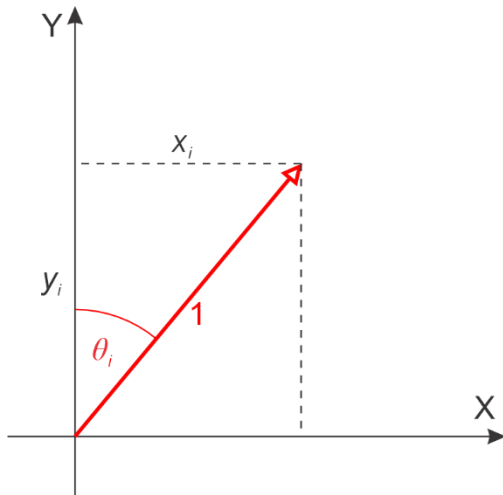
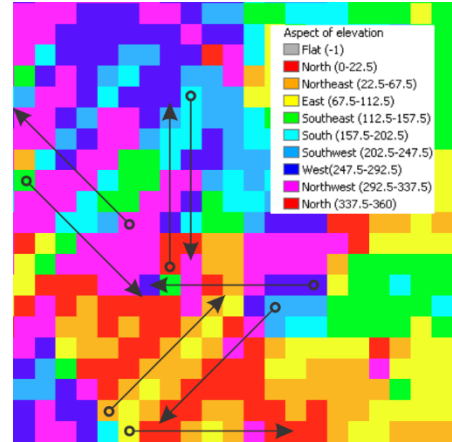
Ryc. 1. Wartości przykładowej zmiennej zregionalizowanej wyrażone wartościami kątowymi. Wektory: czerwony – 15° , zielony – 345° , żółty – 180° – średni kąt obliczony nieprawidłowo, niebieski – 0° – średni kąt obliczony poprawnie

Gdybyśmy za pomocą zwykłej skalarnej średniej arytmetycznej z takich dwóch obiektów chcieli policzyć wartość średnią to otrzymamy: $\frac{15^\circ + 345^\circ}{2} = 180^\circ$ (wektor na granicy III i IV ćwiartki układu współrzędnych) (zob. **Ryc. 1**). Jest to wynik nonsensowny, bowiem intuicyjnie czujemy, że ta wartość powinna wynosić 0° . Stąd wynika, że dane kie-

runkowe powinniśmy traktować specjalnie, używając wzorów odpowiednich dla danych cyrkularnych.

Średni kierunek

Aby na podstawie obrazu rastrowego kątovej cechy krajobrazu (np. *Aspect*), dla każdego pola podstawowego wybranej siatki analitycznej obliczyć odchylenie standardowe cyrkularne (SD_c), należy myśleć o danych nie jako o zwykłej macierzy pikseli (rastrze) z wartościami kątów, lecz jak o zbiorze wektorów jednostkowych¹ zaczepionych w początku układu współrzędnych i skierowanych zgodnie z kątami θ_i reprezentowanymi przez każdy piksel (Ryc. 2).



$$\sin \varphi_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} = \frac{x_i}{1} = x_i \quad (1)$$

$$\cos \varphi_i = \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} = \frac{y_i}{1} = y_i \quad (2)$$

Ryc. 2. Przykładowy wektor jednostkowy nachylony do osi OY (kierunek N) pod kątem θ_i

Każde pole podstawowe siatki analitycznej zawiera więc n wektorów o azymutach $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$. Każdy wektor jednostkowy można rzutować na osie OX i OY układu współrzędnych, opisując go komponentami: $x_i = \sin(\theta_i)$ (1) i $y_i = \cos(\theta_i)$ (2) (Ryc. 2).

Wektor wypadkowy \vec{R} będący sumą wszystkich wektorów jednostkowych będzie więc miał komponenty:

$$x_r = \sum_{i=1}^n \sin(\theta_i) \quad (3)$$

$$y_r = \sum_{i=1}^n \cos(\theta_i) \quad (4)$$

oraz długość:

$$R = \sqrt{x_r^2 + y_r^2} \quad (5)$$

¹ Wektor jednostkowy to wektor, którego długość (moduł) wynosi 1, niezależnie od kierunku, czyli $\sqrt{x_i^2 + y_i^2} = 1$.

gdzie n to liczba pikseli w obliczanym polu podstawowym. Średni (wypadkowy) kierunek wektora wypadkowego – $\bar{\theta}_c$ jest wtedy kierunkiem przeciwprostokątnej trójkąta utworzonego przez x_r i y_r (np. [Batschelet, 1965](#); [Mahan, 1991](#); [Swan et al., 1995](#)) i jest obliczany ze wzoru 6.

$$\bar{\theta}_c = \begin{cases} \arctg \frac{x_r}{y_r} & \text{for } x_r > 0 \text{ and } y_r > 0 \\ \arctg \frac{x_r}{y_r} + 180^\circ & \text{for } y_r < 0 \\ \arctg \frac{x_r}{y_r} + 360^\circ & \text{for } x_r < 0 \text{ and } y_r > 0 \end{cases} \quad (6)$$

Przypadek braku zmienności i jednocześnie idealnej, **maksymalnej koncentracji** wektorów jednostkowych wokół kątowej średniej $\bar{\theta}_c$ ma miejsce wtedy gdy kąty wszystkich wektorów jednostkowych są takie same (wszystkie wektory są do siebie równoległe). R wtedy byłoby równe n (bo to wektory jednostkowe), a koncentracja wektora wypadkowego \bar{R} byłoby równa 1 ([Agterberg, 1974](#)).

Z kolei przy **maksymalnym braku koncentracji**, wtedy gdy wszystkie wektory reprezentują maksymalnie różne kąty, kąt średni $\bar{\theta}_c$ jest nieokreślony, a $\bar{R} = 0$. Wielkość \bar{R} wyraża zatem koncentrację – im dłuższy wektor \bar{R} (większa \bar{R}) tym większa koncentracja wektorów jednostkowych wokół kierunku wypadkowego $\bar{\theta}_c$.

W praktyce koncentrację wektora wypadkowego \bar{R} oblicza się przez podzielenie jego długości R przez liczbę pikseli w poszczególnych polach podstawowych siatki analitycznej (7).

$$\bar{R} = R/n \quad (7)$$

Uniezależnia to wynik od niekiedy różnej liczby pikseli w polach podstawowych i standaryzuje go, bo \bar{R} zawiera się w przedziale $<0; 1>$.

Wariancja i odchylenie standardowe kątowe

Wariancja kątowa jest wielkością opozycyjną względem koncentracji. Liczy się ją według wzoru: $SD_c^2 = 1 - \bar{R}$. Cyrkularne odchylenie standardowe SD_c jest obliczane między innymi według dwóch wzorów. Według [Mardia \(1972\)](#) (8)

$$SD_c = \sqrt{\ln \frac{1}{\bar{R}^2}} = \sqrt{-2 \ln (\bar{R})} = \sqrt{2} \sqrt{-\ln (\bar{R})} \quad (8)$$

lub według [Batschelet \(1965\)](#); zob. też [Mahan \(1991\)](#) i [Demir & Bilgin \(2019\)](#) (9).

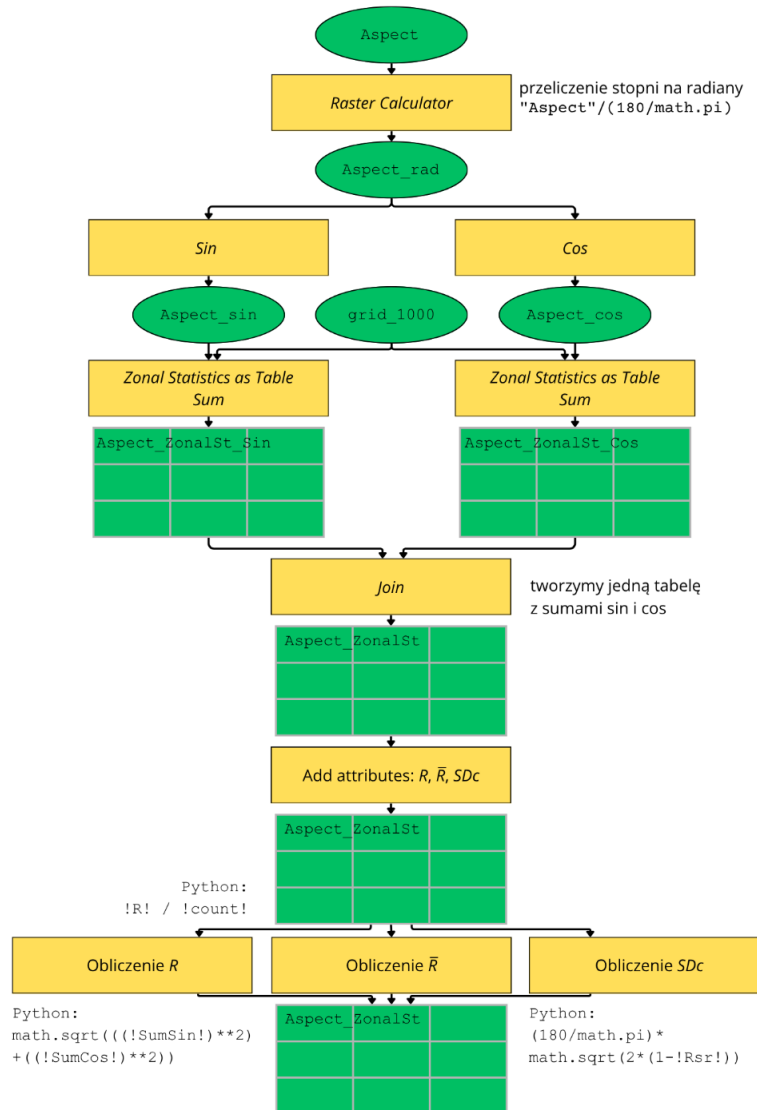
$$SD_c = \sqrt{2} \sqrt{1 - \bar{R}} = \sqrt{2(1 - \bar{R})} \quad (9)$$

Jeśli kąty są wyrażane w stopniach, to w podanych wzorach konieczny jest dodatkowy współczynnik $\frac{180^\circ}{\pi}$. W dalszych rozważaniach będzie stosowana postać wzoru (9) (według Batschelet, 1965), ponieważ, jak twierdzą Bartuś & Mastej (2025), działa on bardziej asekuracyjnie. Ostateczną jego postać przedstawia wzór (10).

$$SD_c = \frac{180^\circ}{\pi} \sqrt{2(1 - \bar{R})} = \frac{180^\circ}{\pi} \sqrt{2 \left(1 - \frac{\sqrt{[\sum_{i=1}^n \sin(\theta_i)]^2 + [\sum_{i=1}^n \cos(\theta_i)]^2}}{n} \right)} \quad (10)$$

2. Procedura obliczeń kryteriów opartych na odchyleniu standardowym cyrkularnym

Obliczeń kryteriów cząstkowych opartych o odchylenie standardowe cyrkularne (w naszym przypadku chodzi wyłącznie o kryterium $Aspect_{SDc}$) wykonujemy za pomocą procedury przedstawionej na Ryc. 3.

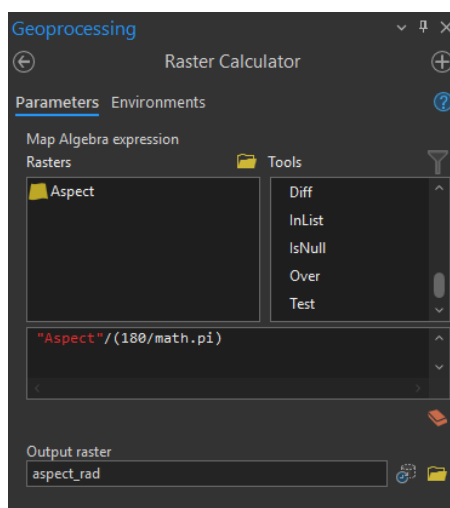


Ryc. 3. Diagram obliczeń kryterium cząstkowego $Aspect$ za pomocą odchylenia standardowego cyrkularnego

3. Konwersja ze stopni na radiany

W związku z tym, że funkcje \sin i \cos w ArcGIS Pro wymagają wartości kątów wyrażonych w radianach², wartości wyrażone w stopniach należy przeliczyć na radiany. Wykorzystujemy do tego narzędzie kalkulator rastrów oraz wyrażenie Python `"Aspect"/(180/math.pi)` (Ryc. 3).

- 3.1. Otwórz mapę 5.2. Map_Morf_Aspect.
- 3.2. Wyszukaj narzędzie *Raster Calculator* (*Spatial Analyst Tools*).
- 3.3. W otwartym panelu narzędzia *Raster Calculator* wprowadź formułę przeliczeniową stopni na radiany: `"Aspect"/(180/math.pi)`.
- 3.4. Zbiór wynikowy (*Output raster*) zapisz do folderu ...\\GEODIVERSITY\\NMT\\. Jego nazwa to `Aspect_rad` (Ryc. 4).

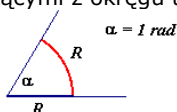


Ryc. 4. Panel narzędzia *Raster Calculator* z wyrażeniem konwertującym raster *Aspect* na *Aspect_rad* wyrażony w radianach

- 3.5. Naciśnij przycisk *Run*.

W wyniku operacji uzyskujemy zbiór rastrowy `Aspect_rad` (Ryc. 5).

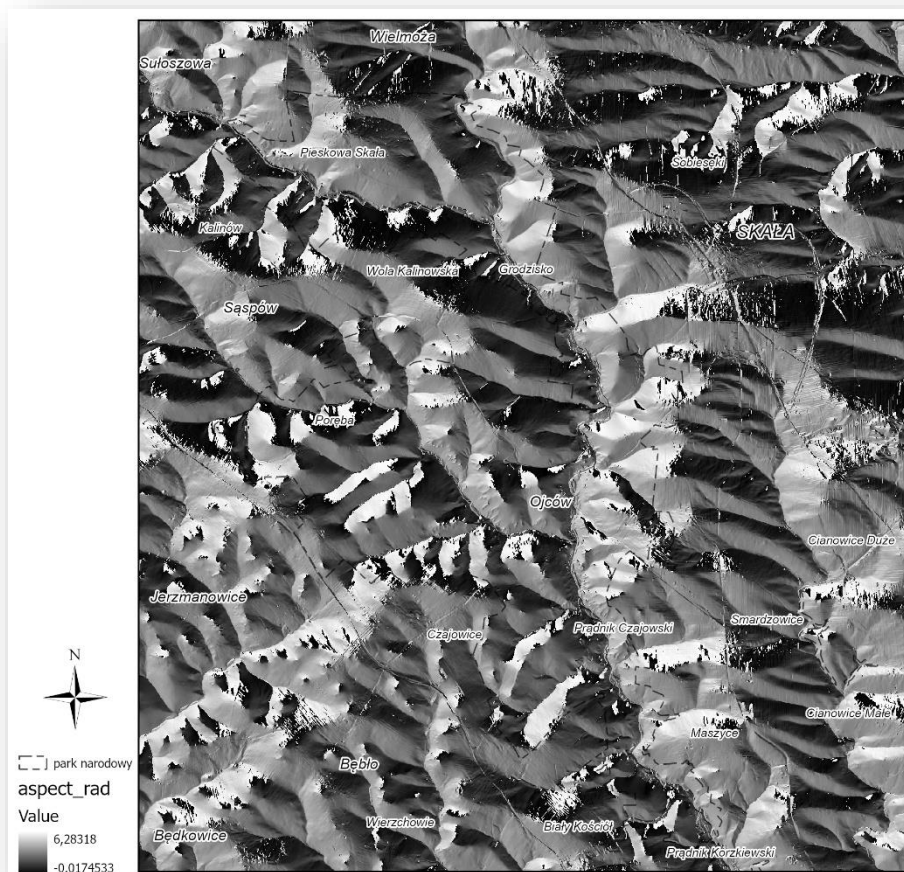
² Radian (rad) jest jednostką uzupełniającą układu SI. Jest to kąt płaski równy kątowi między dwoma promieniami koła, wycinającymi z okręgu tego koła łuk o długości równej promieniowi.



$$1 \text{ rad} = 180^\circ/\pi = \text{około } 57,29578^\circ$$

$$\text{radiany} = \frac{\text{stopnie} \cdot \pi}{180}$$

$$\text{stopnie} = \frac{\text{radiany} \cdot 180}{\pi}$$

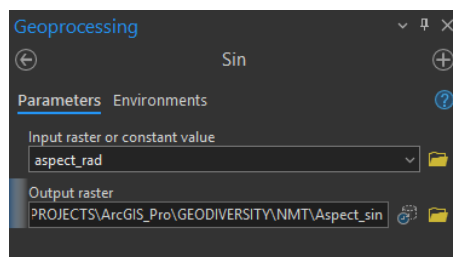


Ryc. 5. Powierzchnia *Aspect* wyrażona w radianach

4. Sin i cos kątów

Aby dla atrybutu topograficznego *Aspect* obliczyć odchylenie standardowe cyrkularne *AspectSDc* musimy obliczyć \bar{R} (9). Wymaga to obliczenia wartości sinusów i cosinusów wartości kątów wszystkich pikseli danego pola podstawowego (10). Dlatego w kolejnym kroku, dla każdego piksela obrazu rastrowego *Aspect_rad* obliczamy wartości sinusów i cosinusów. Służą do tego funkcje Python *sin* i *cos*. W wyniku przeprowadzonych operacji otrzymujemy obrazy rastrowe *Aspect_Sin* oraz *Aspect_Cos* (Ryc. 3).

- 4.1. Wyszukaj narzędzie *Sin* (*Spatial Analyst Tools*).
- 4.2. W otwartym panelu narzędzia *Sin* wybierz zbiór wejściowy (*Input raster or constant value*): *Aspect_rad*.
- 4.3. Zbiór wynikowy (*Output raster*) zapisz do folderu ...\\GEODIVERSITY\\NMT\\. Jego nazwa to *Aspect_sin* (Ryc. 6).



Ryc. 6. Panel narzędzia Sin obliczającego sinusy kątów rastra Aspect wyrażonego w radianach

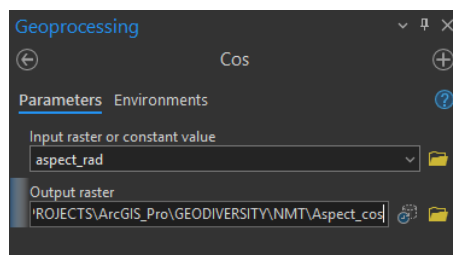
4.4. Naciśnij przycisk *Run*.

Zostanie utworzony rastrowy zbiór danych Aspect_sin (Ryc. 8A).

4.5. Wyszukaj narzędzie *Cos* (*Spatial Analyst Tools*).

4.6. W otwartym panelu narzędzia *Cos* wybierz zbiór wejściowy (*Input raster or constant value*): Aspect_rad.

4.7. Zbiór wynikowy (*Output raster*) zapisz do folderu ...\\GEODIVERSITY\\NMT\\. Jego nazwa to Aspect_cos (Ryc. 7).

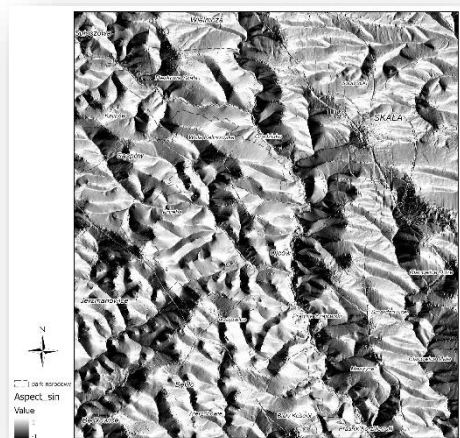


Ryc. 7. Panel narzędzia Cos obliczającego cosinusy kątów rastra Aspect wyrażonego w radianach

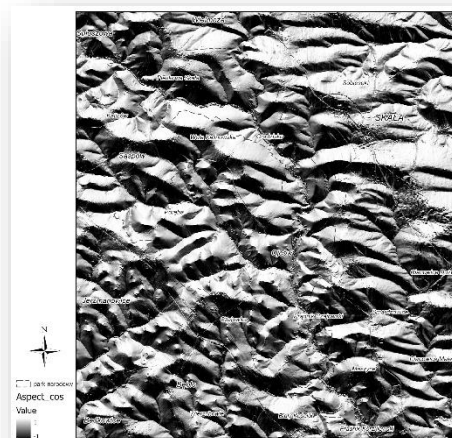
4.8. Naciśnij przycisk *Run*.

Zostanie utworzony rastrowy zbiór danych Aspect_cos (Ryc. 8B).

A



B



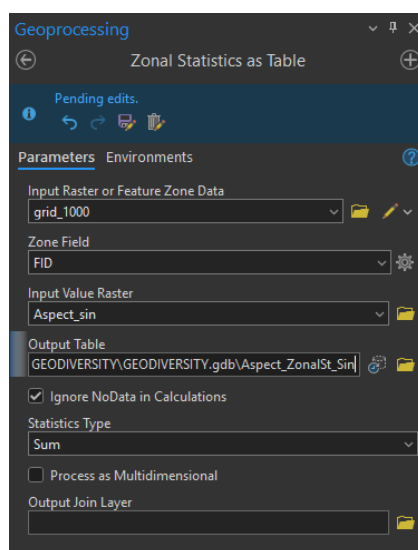
Ryc. 8. Powierzchnie sinusów (A) i cosinusów (B) kątów ekspozycji stoków (Aspect)

5. Sumy sin i cos w polach siatki analitycznej

Teraz przejdziemy do obliczeń w polach siatki analitycznej. Dla każdego pola podstawowego siatki musimy policzyć sumy sinusów i sumy cosinusów poszczególnych pikseli (5). Wykorzystamy do tego narzędzie ArcGIS Pro – *Zonal Statistics as Table* oraz operator *Sum*. Narzędzie utworzy dwie tabele (jedna dla *sin*, a druga dla *cos*), w których dla każdego pola podstawowego zostaną obliczone sumy sinusów i cosinusów. W wyniku obliczeń do geobazy powinny zostać zapisane dwie tabele: *Aspect_ZonalSt_Sin* oraz *Aspect_ZonalSt_Sin* (Ryc. 3).

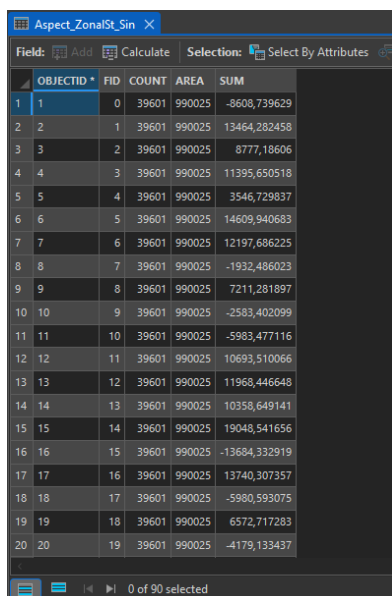
Zacznijmy od obliczenia sumy sinusów (zob. 3).

- 5.1. Dodaj na scenę mapy warstwę *grid_1000.shp*.
- 5.2. Wyszukaj narzędzie *Zonal Statistics as Table* (*Spatial Statistics Tools*)
- 5.3. Jako *Input Raster or Feature Zone Data* (*Rastrowy zbiór wejściowy*) wprowadź klasę siatki analitycznej *grid_1000.shp* (Ryc. 9).
- 5.4. Jako identyfikator pól podstawowych siatki analitycznej (*Zone Field*) wprowadź *FID*.
- 5.5. Jako *Input Value Raster* (*Rastrowy zbiór wartości*) zdefiniuj zbiór obliczonych sinusów *Aspect_sin*.
- 5.6. Tabelę wyjściową zapisz do geobazy *GEODIVERSITY.gdb* pod nazwą *Aspect_ZonalSt_Sin*.
- 5.7. Wybierz statystykę jaka ma zostać policzona (*Statistics Type*) (zob. 7) – *Sum*.
- 5.8. Po wypełnieniu wszystkich pól panelu narzędzia geoprzetwarzania, naciśnij przycisk *Run*.



Ryc. 9. Panel narzędzia *Zonal Statistics as Table* obliczającego dla kolejnych pól siatki analitycznej sumy sinusów rastra *Aspect*

W wyniku działania narzędzia w geobazie `GEODIVERSITY.gdb` zostanie utworzona tabela nieprzestrzenna `Aspect_ZonalSt_Sin` z obliczonymi dla każdego pola podstawowego siatki analitycznej sumami sinusów wartości pikseli (Ryc. 10).

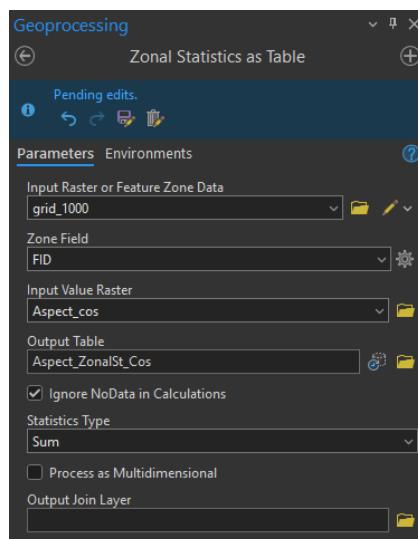


OBJECTID	FID	COUNT	AREA	SUM
1	0	39601	990025	-8608,739629
2	1	39601	990025	13464,282458
3	2	39601	990025	8777,18606
4	3	39601	990025	11395,650518
5	4	39601	990025	3546,729837
6	5	39601	990025	14609,940683
7	6	39601	990025	12197,686225
8	7	39601	990025	-1932,486023
9	8	39601	990025	7211,281897
10	9	39601	990025	-2583,402099
11	10	39601	990025	-5983,477116
12	11	39601	990025	10693,510066
13	12	39601	990025	11968,446648
14	13	39601	990025	10358,649141
15	14	39601	990025	19048,541656
16	15	39601	990025	-13684,332919
17	16	39601	990025	13740,307357
18	17	39601	990025	-5980,593075
19	18	39601	990025	6572,717283
20	19	39601	990025	-4179,133437

Ryc. 10. Zawartość tabeli nieprzestrzennej `Aspect_ZonalSt_Sin`

Teraz obliczymy sumy cosinusów (zob. 4).

- 5.9. Ponownie otwórz narzędzie *Zonal Statistics as Table*.
- 5.10. Jako *Input Raster or Feature Zone Data* ponownie wprowadź klasę siatki analitycznej `grid_1000.shp` (Ryc. 11).
- 5.11. Jako identyfikator pól podstawowych siatki analitycznej (*Zone Field*) wybierz `FID`.
- 5.12. Jako *Input Value Raster (Rastrowy zbiór wartości)* tym razem zdefiniuj zbiór obliczonych cosinusów `Aspect_cos`.
- 5.13. Tabelę wyjściową zapisz do geobazy `GEODIVERSITY.gdb` pod nazwą `Aspect_ZonalSt_Cos`.
- 5.14. Ponownie jako statystykę (*Statistics Type*) wybierz `Sum`.
- 5.15. Po wypełnieniu wszystkich pól panelu narzędzia geoprzetwarzania, naciśnij przycisk *Run*.



Ryc. 11. Panel narzędzia *Zonal Statistics as Table* obliczającego dla kolejnych pól siatki analitycznej sumy cosinusów rastra Aspect

W wyniku działania narzędzia w geobazie GEODIVERSITY.gdb zostanie utworzona tabela nieprzestrzenna Aspect_ZonalSt_Cos z obliczonymi dla każdego pola podstawowego siatki analitycznej sumami cosinusów wartości pikseli (Ryc. 12).

OBJECTID	FID	COUNT	AREA	SUM
1	0	39601	990025	-5500,95476
2	1	39601	990025	-5778,938417
3	2	39601	990025	-9632,616257
4	3	39601	990025	-5798,963539
5	4	39601	990025	-6795,812556
6	5	39601	990025	4342,005615
7	6	39601	990025	1880,264296
8	7	39601	990025	-6490,067252
9	8	39601	990025	-3141,549887
10	9	39601	990025	-4399,540713
11	10	39601	990025	-2574,799131
12	11	39601	990025	-5299,994976
13	12	39601	990025	-9246,813352
14	13	39601	990025	-5408,108578
15	14	39601	990025	417,009498
16	15	39601	990025	-12356,573845
17	16	39601	990025	-8628,406028
18	17	39601	990025	-6496,030027
19	18	39601	990025	-13030,68246
20	19	39601	990025	-2148,205048

Ryc. 12. Zawartość tabeli nieprzestrzennej Aspect_ZonalSt_Cos

6. Utworzenie tabeli wyników Aspect_ZonalSt

W tej części obliczeń przygotujemy osobną tabelę nieprzestrzenną, w której dla kolejnych oczek siatki analitycznej będziemy dokonywać niezbędnych obliczeń.

- 6.1. Wyeksportuj tabelę siatki analitycznej grid_1000 do geobazy GEODIVERSITY.gdb do tabeli nieprzestrzennej Aspect_ZonalSt. Można to zrobić klikając ppm warstwę grid_1000 i z menu kontekstowego wybierając po-

lecenia: *Data > Export Table*. Za pomocą opcji *Field* usuń eksport wszystkich atrybutów.

Plik siatki mamy przygotowany. Teraz skopiujemy do niego potrzebne atrybuty.

7. Kopiowanie wartości atrybutów do tabeli wyników

W tabeli wyników *Aspect_ZonalSt* utworzymy cztery nowe atrybuty. Tabele *Aspect_ZonalSt_Sin* oraz *Aspect_ZonalSt_Cos* otrzymane w ostatnim kroku analizy kolejno połączymy z tabelą wyników *Aspect_ZonalSt* i przekopiujemy do niej obliczone wartości sum sinusów i cosinusów. Do połączenia używamy polecenia *Join* oraz identyfikatorów (kluczy podstawowych) poszczególnych pól siatki analitycznej.

- 7.1. Otwórz tabelę nieprzestrzenną *Aspect_ZonalSt*.
- 7.2. Za pomocą polecenia *Add* dodaj do tabeli cztery atrybuty: *FID* (identyfikator pól podstawowych siatki) o typie *Short*, atrybut *Count* (liczby pikseli w poszczególnych polach podstawowych) o typie *Long Integer* oraz atrybuty *SumSin* oraz *SumCos* o typie *Double* (Ryc. 13).

Visible	Read Only	Field Name	Alias	Data Type	Allow NULL
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	OBJECTID	OBJECTID	Object ID	<input type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	FID		Short	<input checked="" type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Count		Long	<input checked="" type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	SumSin		Double	<input checked="" type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	SumCos		Double	<input checked="" type="checkbox"/>

Ryc. 13. Definicje nowych atrybutów tabeli nieprzestrzennej *Aspect_ZonalSt*

- 7.3. Za pomocą kalkulatora pól oblicz wartości atrybutu *FID* jako *OBJECTID - 1* (numery pól podstawowych zaczynają się od 0) (Ryc. 14).

Field	OBJECTID	FID	Count	SumSin	SumCos
1	1	0	<Null>	<Null>	<Null>
2	2	1	<Null>	<Null>	<Null>
3	3	2	<Null>	<Null>	<Null>
4	4	3	<Null>	<Null>	<Null>
5	5	4	<Null>	<Null>	<Null>
6	6	5	<Null>	<Null>	<Null>
7	7	6	<Null>	<Null>	<Null>
8	8	7	<Null>	<Null>	<Null>
9	9	8	<Null>	<Null>	<Null>
10	10	9	<Null>	<Null>	<Null>
11	11	10	<Null>	<Null>	<Null>
12	12	11	<Null>	<Null>	<Null>

Ryc. 14. Tabela nieprzestrzenna *Aspect_ZonalSt* z obliczonymi wartościami atrybutu *FID*.

Połączymy teraz z tabelą `Aspect_ZonalSt` kolejno tabele: `Aspect_ZonalSt_Sin` i `Aspect_ZonalSt_Cos` i przekopiujemy do niej atrybuty `Count` oraz `SumSin` i `SumCos`. Kluczem połączenia będą atrybuty `FID`.

- 7.4. W panelu *Contents* mapy 5.2. `Map_Morf_Aspect` kliknij ppm na tabelę `Aspect_ZonalSt` i z menu kontekstowego wybierz polecenie *Joins and Relates > Add Join* i podłącz do niej tabelę `Aspect_ZonalSt_Sin`.
- 7.5. Do atrybutu `Count` tabeli `Aspect_ZonalSt` przekopiuj wartości atrybutu `COUNT` tabeli `Aspect_ZonalSt_Sin`.
- 7.6. Do atrybutu `SumSin` tabeli `Aspect_ZonalSt` przekopiuj wartości atrybutu `SUM` tabeli `Aspect_ZonalSt_Sin`.
- 7.7. Odłącz połączenie tabel klikając ppm na tabeli `Aspect_ZonalSt` i z menu kontekstowego wybierając *Joins and Relates > Remove All Joins*.
- 7.8. Zachowaj edycję tabeli.
- 7.9. W panelu *Contents* mapy 5.2. `Map_Morf_Aspect` kliknij ppm na tabelę `Aspect_ZonalSt` i z menu kontekstowego ponownie wybierz polecenie *Joins and Relates > Add Join* i dołącz do niej tabelę `Aspect_ZonalSt_Cos`.
- 7.10. Do atrybutu `SumCos` tabeli `Aspect_ZonalSt` przekopiuj wartości atrybutu `SUM` tabeli `Aspect_ZonalSt_Cos`.
- 7.11. Odłącz połączenie tabel klikając ppm na tabeli `Aspect_ZonalSt` i z menu kontekstowego wybierając *Joins and Relates > Remove All Joins*.
- 7.12. Zachowaj edycję tabeli.

Sprawdź wyrywkowo kilka wartości z **Ryc. 15**.

Aspect_ZonalSt					
Field:		Add	Calculate		Selection: Select By A
	OBJECTID *	FID	Count	SumSin	SumCos
1	1	0	39601	-8608,739629	-5500,95476
2	2	1	39601	13464,282458	-5778,938417
3	3	2	39601	8777,18606	-9632,616257
4	4	3	39601	11395,650518	-5798,963539
5	5	4	39601	3546,729837	-6795,812556
6	6	5	39601	14609,940683	4342,005615
7	7	6	39601	12197,686225	1880,264296
8	8	7	39601	-1932,486023	-6490,067252
9	9	8	39601	7211,281897	-3141,549887
10	10	9	39601	-2583,402099	-4399,540713
11	11	10	39601	-5983,477116	-2574,799131
12	12	11	39601	10693,510066	-5299,994976

Ryc. 15. Tabela nieprzestrzenna `Aspect_ZonalSt` z wartościami atrybutów: `FID`, `Count`, `SumSin` i `SumCos`.

8. Długości wektorów wypadkowych R

- 8.1. Do tabeli `Aspect_ZonalSt` dodaj kolejno trzy nowe atrybuty: R , Rsr oraz SDc (double) (**Ryc. 16**).

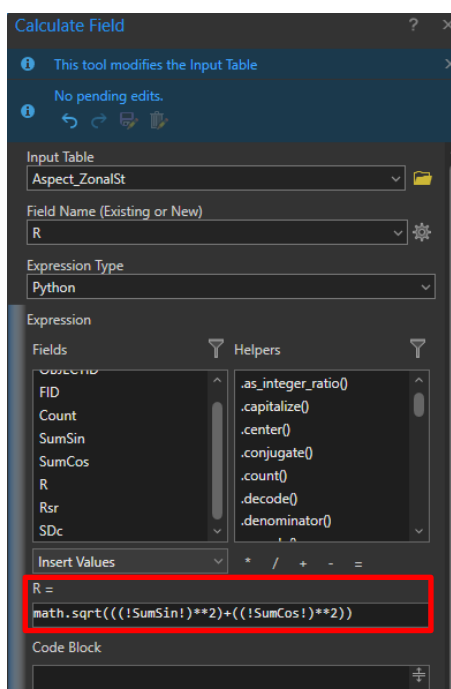
Visible	Read Only	Field Name	Alias	Data Type	Allow NULL
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	OBJECTID	OBJECTID	Object ID	<input type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	FID	FID	Short	<input checked="" type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Count	Count	Long	<input checked="" type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	SumSin	SumSin	Double	<input checked="" type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	SumCos	SumCos	Double	<input checked="" type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	R		Double	<input checked="" type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Rsr		Double	<input checked="" type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	SDc		Double	<input checked="" type="checkbox"/>

Ryc. 16. Definicje nowych atrybutów tabeli nieprzestrzennej `Aspect_ZonalSt`

Za pomocą wzoru 5, dla każdego pola podstawowego siatki analitycznej oblicz długości wektorów wypadkowych \vec{R} (atrybut R).

- 8.2. Kliknij ppm na nagłówku atrybutu R tabeli `Aspect_ZonalSt`. Z menu kontekstowego wybierz polecenie *Calculate Field (Oblicz pole)*.
- 8.3. Za pomocą wyrażenia Python oblicz wartości atrybutu R (**Ryc. 17**).

```
math.sqrt(((SumSin!)**2)+((SumCos!)**2))
```



Ryc. 17. Panel narzędzia *Calculate Field* obliczający wartości długości wektorów wypadkowych \vec{R}

- 8.4. Zachowaj edycję tabeli wyników `Aspect_ZonalSt`.

Wyrażenie dla każdego pola siatki analitycznej obliczyło długości wektorów wypadkowych \vec{R} (Ryc. 18).

OBJECTID	FID	Count	SumSin	SumCos	R	Rsr	SDC
1	0	39601	-8608,739629	-5500,95476	10216,207773	<Null>	<Null>
2	1	39601	13464,282458	-5778,938417	14652,065771	<Null>	<Null>
3	2	39601	8777,18606	-9632,616257	13031,741675	<Null>	<Null>
4	3	39601	11395,650518	-5798,963539	12786,275019	<Null>	<Null>
5	4	39601	3546,729837	-6795,812556	7665,661147	<Null>	<Null>
6	5	39601	14609,940683	4342,005615	15241,501879	<Null>	<Null>
7	6	39601	12197,686225	1880,264296	12341,756078	<Null>	<Null>
8	7	39601	-1932,486023	-6490,067252	6771,667089	<Null>	<Null>
9	8	39601	7211,281897	-3141,549887	7865,870726	<Null>	<Null>
10	9	39601	-2583,402099	-4399,540713	5101,953047	<Null>	<Null>
11	10	39601	-5983,477116	-2574,799131	6513,953405	<Null>	<Null>
12	11	39601	10693,510066	-5299,994976	11934,869261	<Null>	<Null>

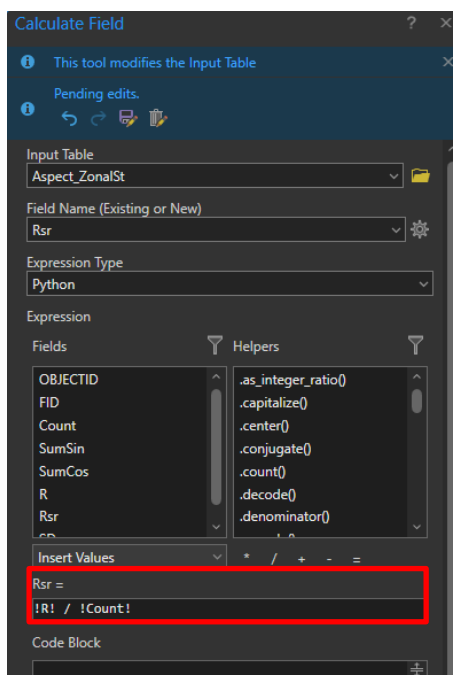
Ryc. 18. Tabela nieprzestrzenna Aspect_ZonalSt z obliczonymi długościami wektorów wypadkowych \vec{R} (atrybut R)

9. Koncentracje wektora wypadkowego \vec{R}

Za pomocą wzoru 7, dla każdego pola podstawowego siatki analitycznej oblicz koncentrację wektorów wypadkowych \vec{R} (atrybut Rsr).

- 9.1. Kliknij ppm na nagłówku atrybutu Rsr tabeli Aspect_ZonalSt. Z menu kontekstowego wybierz polecenie *Calculate Field (Oblicz pole)*.
- 9.2. Za pomocą wyrażenia Python oblicz wartości atrybutu Rsr (Ryc. 19).

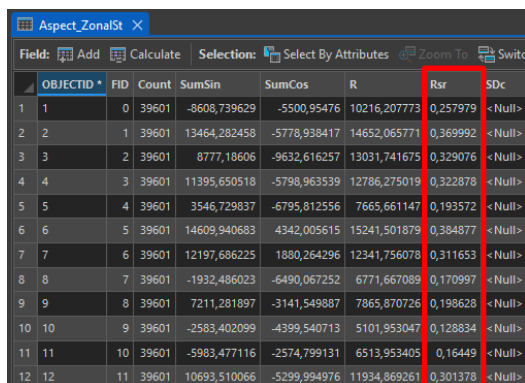
$!R! / !Count!$



Ryc. 19. Panel narzędzia *Calculate Field* obliczający koncentracje wektorów wypadkowych

- 9.3. Zachowaj edycję tabeli wyników Aspect_ZonalSt.

Wyrażenie dla każdego pola siatki analitycznej obliczyło koncentracje wektorów wypadkowych \bar{R} (Ryc. 20).



OBJECTID	FID	Count	SumSin	SumCos	R	Rsr	SDc
1	0	39601	-8608,739629	-5500,95476	10216,207773	0,257979	<Null>
2	1	39601	13464,282458	-5778,938417	14652,065771	0,369992	<Null>
3	2	39601	8777,18606	-9632,616257	13031,741675	0,329076	<Null>
4	3	39601	11395,650518	-5798,963539	12786,275019	0,322878	<Null>
5	4	39601	3546,729837	-6795,812556	7665,661147	0,193572	<Null>
6	5	39601	14609,940683	4342,005615	15241,501879	0,384877	<Null>
7	6	39601	12197,686225	1880,264296	12341,756078	0,311653	<Null>
8	7	39601	-1932,486023	-6490,067252	6771,667089	0,170997	<Null>
9	8	39601	7211,281897	-3141,549887	7865,870726	0,198628	<Null>
10	9	39601	-2583,402099	-4399,540713	5101,953047	0,128834	<Null>
11	10	39601	-5983,477116	-2574,799131	6513,953405	0,16449	<Null>
12	11	39601	10693,510066	-5299,994976	11934,869261	0,301378	<Null>

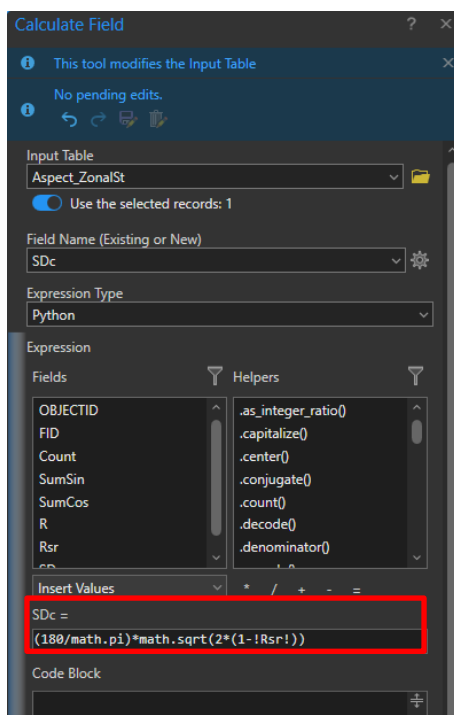
Ryc. 20. Tabela nieprzestrzenna Aspect_ZonalSt z obliczonymi koncentracjami wektorów wypadkowych \bar{R} (atrybut Rsr)

10. Odchylenia standardowe cyrkularne SD_c

Za pomocą wzoru 10, dla każdego pola podstawowego siatki analitycznej oblicz wartości odchyłeń standardowych cyrkularnych SD_c (atrybut SDc).

- 10.1. Kliknij ppm na nagłówku atrybutu SDc tabeli Aspect_ZonalSt. Z menu kontekstowego wybierz polecenie *Calculate Field (Oblicz pole)*.
- 10.2. Za pomocą wyrażenia Python oblicz wartości atrybutu SDc (Ryc. 21).

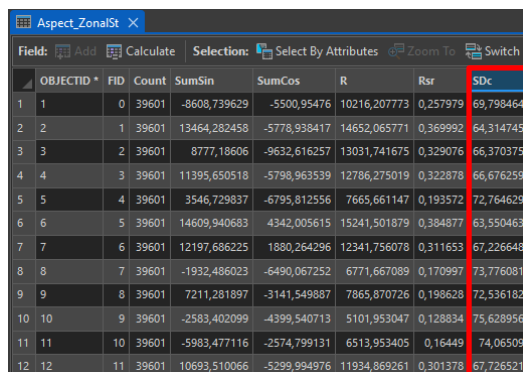
$(180/\text{math.pi}) * \text{math.sqrt}(2 * (1 - !\text{Rsr}))$



Ryc. 21. Panel narzędzia *Calculate Field* obliczający odchylenia standardowe cyrkularne SD_c

- 10.3. Zachowaj edycję tabeli wyników Aspect_ZonalSt.

Wyrażenie dla każdego pola siatki analitycznej obliczyło cyrkularne odchylenia standardowe SD_c (Ryc. 22).



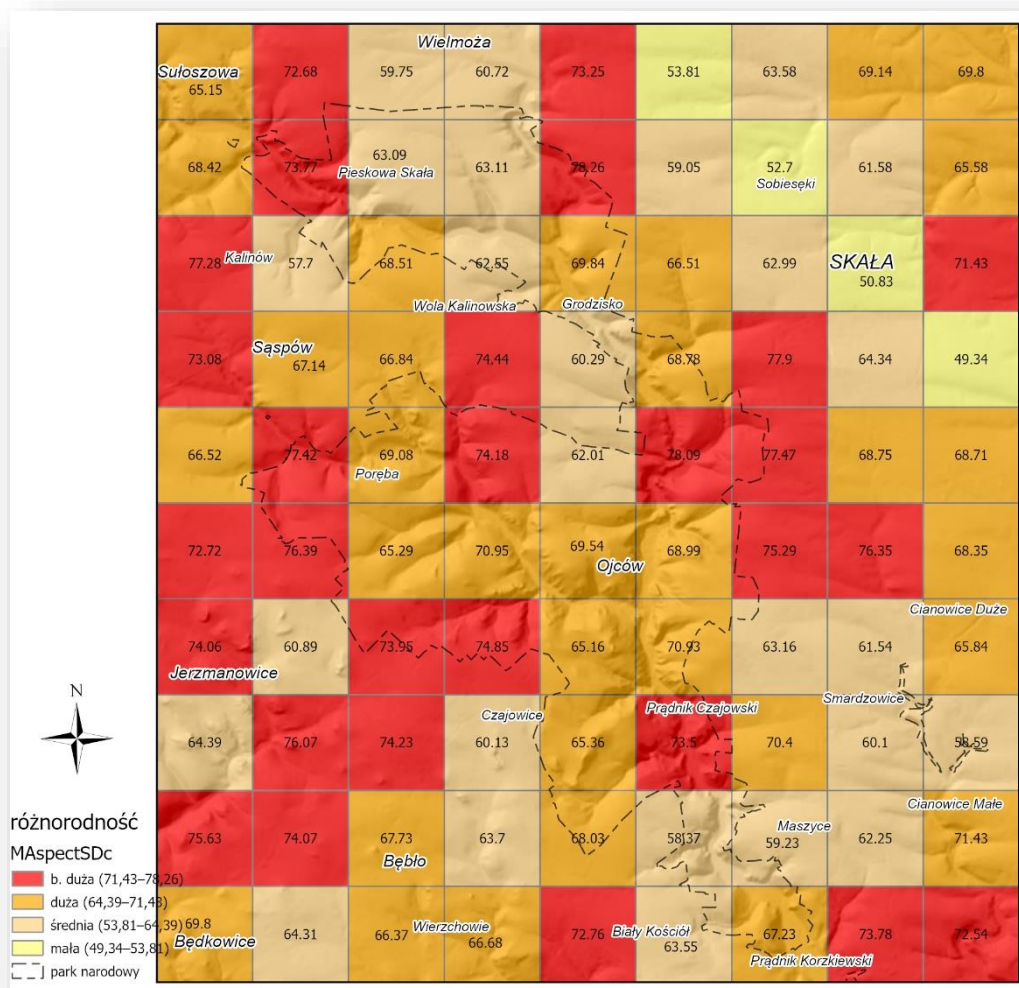
OBJECTID	FID	Count	SumSin	SumCos	R	Rsr	SDc
1	0	39601	-8608,739629	-5500,95476	10216,207773	0,257979	69,798464
2	1	39601	13464,282458	-5778,938417	14652,065771	0,369992	64,314745
3	2	39601	8777,18606	-9632,616257	13031,741675	0,329076	66,370375
4	3	39601	11395,650518	-5798,963539	12786,275019	0,322878	66,676259
5	4	39601	3546,729837	-6795,812556	7665,661147	0,193572	72,764629
6	5	39601	14609,940683	4342,005615	15241,501879	0,384877	63,550463
7	6	39601	12197,686225	1880,264296	12341,756078	0,311653	67,226648
8	7	39601	-1932,486023	-6490,067252	6771,667089	0,170997	73,776081
9	8	39601	7211,281897	-3141,549887	7865,870726	0,198628	72,536182
10	9	39601	-2583,402099	-4399,540713	5101,953047	0,128834	75,628956
11	10	39601	-5983,477116	-2574,799131	6513,953405	0,16449	74,06509
12	11	39601	10693,510066	-5299,994976	11934,869261	0,301378	67,726521

Ryc. 22. Tabela nieprzestrzenna Aspect_ZonalSt z obliczonymi koncentracjami wektorów wypadkowych \vec{R} (atrybut Rsr)

11. Różnorodność ekspozycji stoków

- 11.1. Otwórz mapę 6.2. Map_RMAspectSDcm.
- 11.2. Z dowolnej innej mapy dodaj do mapy 6.2. Map_RMAspectSDcm warstwę różnorodność z siatką pól podstawowych.
- 11.3. W warstwie różnorodność (plik grid_1000.shp) utwórz atrybut MAspectSDc (Float).
- 11.4. W panelu Contents mapy 6.2. RMAspectSDcm kliknij ppm na warstwę różnorodność i z menu kontekstowego ponownie wybierz polecenie Joins and Relates > Add Join i dołącz do niej tabelę Aspect_ZonalSt.
- 11.5. Do atrybutu MAspectSDc klasy różnorodność przekopiuj wartości atrybutu SDc tabeli Aspect_ZonalSt.
- 11.6. Odłącz połączenie tabel klikając ppm na warstwie różnorodność i z menu kontekstowego wybierając polecenie Joins and Relates > Remove All Joins.
- 11.7. Zachowaj edycję tabeli.
- 11.8. W panelu Contents przesuń hierarchię warstwę różnorodność tuż ponad warstwę Aspect.
- 11.9. Warstwie różnorodność nadaj przezroczystość 30%.
- 11.10. W panelu Contents wyłącz widoczność warstwy różnorodność.
- 11.11. Włącz widoczność cieniowanego reliefu terenu.
- 11.12. Dokonaj klasyfikacji zmienności atrybutu MAspectSDc metodą równych przerw, a następnie symbolizacji.
- 11.13. Dokonaj etykietowania pól siatki analitycznej według wartości atrybutu MAspectSDc.

Ryc. 23 przedstawia cząstkową różnorodność morfologiczną, która została obliczona na podstawie kryterium odchylenia standardowego cyrkularnego ekspozycji stoków.



Ryc. 23. Morforóżnorodność na podstawie kryterium AspectSDc

12. Bibliografia

- Agterberg, F. P. (1974). *Geomathematics. Mathematical background and geo-science applications*. Elsevier Scientific Pub. Co.
- Bartuś, T., & Mastej, W. (2025). HOW to use continuous variables in geodiversity assessments – RASTER continuous morphodiversity model. *Environmental Modelling & Software*, 193(0), 106597. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2025.106597>
- Batschelet, E. (1965). *Statistical methods for the analysis of problems in animal orientation and Certain Biological Rhythms*. American Institute of Biological Sciences.
- Demir, Y., & Bilgin, Ö. C. (2019). Application of circular statistics to life science data. *Medical Science and Discovery*, 63–72. <https://doi.org/10.17546/msd.507582>
- Mahan, R. P. (1991). *Circular Statistical Methods: Applications in Spatial and Temporal Performance Analysis*. U.S. Army Research Institute for the Behavioral and Social Sciences. <https://apps.dtic.mil/sti/tr/pdf/ADA240751.pdf>
- Mardia, K. V. (1972). *Statistics of Directional Data*. Academic Press, Inc. https://api.pageplace.de/preview/DT0400.9781483218663_A23863248/preview-9781483218663_A23863248.pdf
- Swan, A. R. H., Sandilands, M., & McCabe, P. (1995). *Introduction to geological data analysis*. Blackwell Science Ltd.