
Analiza matematyczna

Materiał ćwiczeniowy dla studentów kierunku Automatyka i robotyka WEAIIB AGH

Michał Góra
Wydział Matematyki Stosowanej AGH

Kraków 2024

Zestaw 1. Funkcje – wybrane własności

1. Niech $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, gdzie $X, Y, Z \subset \mathbb{R}$. Wykaż poniższe zależności:
 - (a) f, g – funkcje rosnące (malejące) $\Rightarrow g \circ f$ – funkcja rosnąca;
 - (b) f – funkcja okresowa $\Rightarrow g \circ f$ – funkcja okresowa;
 - (c) f – funkcja okresowa o okresie podstawowym T , g – iniekcja $\Rightarrow g \circ f$ funkcja okresowa o okresie podstawowym T .
2. ☠ Niech f, g będą funkcjami okresowymi. Czy $f + g$ jest również funkcją okresową? Jeżeli tak, jaki jest jej okres?
3. Wyznacz okres podstawowy funkcji:
 - (a) $y = \cos(2x - 3)$;
 - (b) $y = \frac{1}{\cos x}$;
 - (c) $y = \ln(|\sin x| + 1)$.
4. Wyznacz funkcję odwrotną do funkcji:
 - (a) $f_1 : [-\pi/2, \pi/2] \ni x \rightarrow \sin x + 1 \in [0, 2]$;
 - (b) $f_2 : (\pi/2, 3\pi/2) \ni x \rightarrow \operatorname{tg} x \in \mathbb{R}$;
 - (c) $f_3 : [-3\pi/2, -\pi/2] \ni x \rightarrow \sin x \in [-1, 1]$;
 - (d) $f_4 : \mathbb{R} \ni x \rightarrow \sinh x \in \mathbb{R}$;
 - (e) $f_5 : [0, \infty) \ni x \rightarrow \cosh x \in [1, \infty)$.
5. Naskicuj wykresy funkcji:
 - (a) $y = \arcsin(\sin x)$;
 - (b) $y = \arcsin(\cos x)$;
 - (c) $y = \sin(\arcsin x)$;
 - (d) $y = \cos(\arcsin x)$;
 - (e) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$;
 - (f) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$.
6. Rozwiąż równanie:
 - (a) $\arccos(-x) + \arccos(x) = \pi$;
 - (b) $\arcsin x + \arcsin(2x) = \frac{\pi}{2}$;
 - (c) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$;
 - (d) $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Zestaw 2. Granice ciągów oraz funkcji jednej zmiennej

1. Korzystając z definicji granicy ciągu, sprawdź równości

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+2} = 0; \quad (b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{n+1} = +\infty; \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n-1)}{2n^2+1} = 2.$$

2. Uzasadnij, że nie istnieją granice ($n \in \mathbb{N}$):

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - n)^n; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k; \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n.$$

3. Wykaż zbieżność podanych ciągów (w przykładach (a), (b), (c), (f) dodatkowo wyznacz granicę); wykorzystaj twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym:

$$(a) a_n = \frac{2^n}{n!};$$

$$(b) b_1 = b > 0, \quad b_{n+1} = \frac{b_n}{1 + b_n};$$

$$(c) c_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right);$$

$$(d) e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$(e) f_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n;$$

$$(f) f_1 = \frac{1}{2}, \quad f_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n^2.$$

4. Wyznacz granice podanych ciągów ($n \rightarrow +\infty$):

$$(a) \frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}; \quad (b) \left(1 + \frac{n+1}{2-n}\right)^n; \quad (c) \frac{1+2+\dots+n}{n^3+1} \cos n!;$$

$$(d) \sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n}; \quad (e) n \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} - 1 \right); \quad (f) \sin^2(\pi \sqrt{n^2+n});$$

$$(g) \left\lceil \frac{3n+1}{n+1} \right\rceil; \quad (h) \left(\frac{4n}{4n+1} \right)^n; \quad (i) (0, \underbrace{9 \dots 9}_{\times n})^{10^n};$$

$$(j) \frac{\cos \frac{1}{n} - 1}{\sin \frac{1}{n}}; \quad (k) \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \sin \frac{x}{2^n}; \quad (l) \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n}.$$

5. Wyznacz podane granice; wykorzystaj twierdzenie o trzech ciągach:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n + 4n}{3n-1}; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n};$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1}}; \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \dots + \frac{1}{n+n^2} \right);$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{2}{2+n^2} + \dots + \frac{n}{n+n^2} \right); \quad (f) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin \frac{1}{n}};$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{2n}]}{n};$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cos n - 5) n^2;$$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right);$$

$$(j) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(2^n + 1)}{\log_2(4^n + 1)}.$$

6. Znajdź granicę L ciągu obwodów L_n oraz granicę S ciągu pól S_n wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu r , gdy liczba boków wielokątów n wzrasta do nieskończoności.

7. W stożek obrotowy o wysokości h i promieniu podstawy r wpisano ostrosłup prawidłowy w ten sposób, że wysokość ostrosłupa jest jednocześnie wysokością stożka, a podstawą ostrosłupa jest n -kąt foremny wpisany w podstawę stożka. Przez S_n oraz V_n oznaczono odpowiednio pole powierzchni całkowitej oraz objętość tak utworzonego ostrosłupa. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$.

8. Uzasadnij, że nie istnieją granice ($x \in \mathbb{R}$):

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x - \cos x); \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin 2\pi x; \quad (d)^* \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin [x].$$

9. ☠ Uzasadnij równości:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

10. Oblicz granice:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{1 - \sqrt{x + 1}};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\arcsin x)^2}{1 - x};$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\arccos x)^2}{1 - x};$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - 1}{x};$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{8 - x}{\sin(\pi x)};$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x};$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x + \sin x};$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{|x|} \right)^{1/x};$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-2)^{[x]}}{x};$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2};$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{\operatorname{tg} x};$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(2^x + 1)}{\ln(3^x + 1)};$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg}^3 \sqrt{x}}{x};$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}.$$

Zestaw 3. Ciągłość i różniczkowalność funkcji jednej zmiennej

1. Wyznacz zbiór punktów ciągłości (lewostronnej i prawostronnej) funkcji:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & , \quad x > 0 \\ \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{\pi}{4} (1-t) \operatorname{tg} \frac{\pi t}{2} \right) & , \quad x \leq 0 \end{cases}; \quad (b) f(x) = x - [x];$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} (-1)^{[x]} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}; \quad (d) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases};$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x-1) + 2x^2 & , |x| > 1 \\ -\frac{\pi}{4} & , x = 0 \end{cases}; \quad (f) f(x) = 1 + \sqrt{\ln \cos(2\pi x)}.$$

2. Wyznacz wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których podane funkcje są ciągłe:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \exp(\log_{x^2+1} e^{-2}) & , x \neq 0 \\ a & , x = 0 \end{cases}; \quad (b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\sin^2 2x}}{2x} & , x \neq 0 \\ \frac{a}{x} & , x = 0 \end{cases};$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} (ax+b) \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}; \quad (d) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & , x \neq 0 \\ a^2 - \frac{1}{2} & , x = 0 \end{cases}.$$

3. Korzystając z definicji oblicz pochodne funkcji:

$$(a) f(x) = \frac{1}{\sin x}; \quad (b) g(x) = a^{-x}; \quad (c) h(x) = \operatorname{tg} x; \quad (d) f(x) = \arcsin x.$$

4. Wyznacz pochodne podanych funkcji:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}; \quad (b) f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & , x \geq 1 \\ 3x^2 & , x < 1 \end{cases};$$

$$(c) y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{3}; \quad (d) y = \arcsin \sqrt[4]{1-5x}; \quad (e) y = \sin^7 \frac{2x+1}{3x+1};$$

$$(f) y = \sin(x^{\operatorname{tg} x}); \quad (g) y = (\sin x)^{\cos x}; \quad (h) y = \operatorname{arctg} \left(x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right);$$

$$(i) y = x^{[x]} + [x+1]^x; \quad (j) y = x \operatorname{sgn}(x^2 - 1); \quad (k) y = x^{e^x} + e^{x^e}.$$

5. Przypuśćmy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 . Oblicz granicę

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Czy z istnienia tej granicy wynika różniczkowalność funkcji f w punkcie x_0 ?

Zestaw 4. Zastosowanie pochodnych funkcji jednej zmiennej

1. Uzasadnij poniższe nierówności; wykorzystaj twierdzenie Lagrange'a:

$$(a) e^x > 1 + x, \text{ dla } x > 0;$$

$$(b) |\ln(1+x) - \ln(1+y)| \leq |x-y|, \text{ dla } x, y > 0;$$

(c) $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$, dla $0 < a < b, n \in \mathbb{N}$.

2. Uzasadnij, że symbolom

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^\infty, \quad \infty^0, \quad 0^0$$

nie można przypisać żadnej ustalonej wartości liczbowej (ani nieskończoności). Wyjaśnij dlaczego wśród symboli nieoznaczonych nie występują symbole 0^∞ oraz ∞^∞ ; łatwo o przykłady pokazujące, że im również nie możemy przypisać *na sztywno* ani wartości 0, ani ∞ .

3. Oblicz poniższe granice; jeżeli to możliwe zastosuj regułę de l'Hospitala:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}; \quad & \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}; \quad & \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{1/x} - 1); \quad & \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}; \\ \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right); \quad & \text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^x; \quad & \text{(h)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{1/\sqrt{x}}; \quad & \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}. \end{aligned}$$

4. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y &= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 15x - 15; & \text{(b)} \quad y &= x^2 e^{-x}; & \text{(c)} \quad y &= \frac{x}{x^2 + 1}; \\ \text{(d)} \quad y &= x^x + [x+1]^x + x^{[x]} + [x+1]^{[x]}; & \text{(e)} \quad y &= 3\sqrt[3]{x^2} - x^2; & \text{(f)} \quad y &= \sqrt{\ln \cos(2\pi x)}; \\ \text{(h)} \quad y &= \arcsin \frac{x}{|x| - 1}; & \text{(i)} \quad y &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}; & \text{(j)} \quad y &= \ln(\log_x \ln x). \end{aligned}$$

5. Wyznacz pochodną funkcji

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} + \operatorname{arctg} x;$$

zapisz ją w najprostszej postaci. Czy funkcja f jest funkcją stałą w swojej dziedzinie? Odpowiedź uzasadnij oraz wyjaśnij zaistniałą sytuację.

6. Uzasadnij nierówności; wykorzystaj monotoniczność stosownie dobranej funkcji:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad e^x &> x + 1, \quad \text{dla } x > 0; \\ \text{(b)} \quad \frac{\operatorname{tg} x}{x} &< \frac{\operatorname{tg} y}{y}, \quad \text{dla } 0 < x < y < \frac{\pi}{2}; \\ \text{(c)} \quad (1+x)^n &\geq 1 + nx, \quad \text{dla } x \geq 0 \text{ oraz } n \in \mathbb{N} \text{ (tzw. nierówność Bernoulliego)}. \end{aligned}$$

7. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji w zadanym przedziale:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y &= \sin 2x - x, \quad [-\pi/2, \pi/2]; & \text{(b)} \quad y &= \begin{cases} x^3 \ln |x| & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}, \quad [-e, e]; \\ \text{(c)} \quad y &= x + \sqrt{|x|}, \quad [-1, 1]; & \text{(d)} \quad y &= x e^{-x}, \quad [0, \infty). \end{aligned}$$

8. Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y &= x + 2 \operatorname{arctg} x; & \text{(b)} \quad y &= \frac{1-x^3}{x^2}; \\ \text{(c)} \quad y &= x e^{x^3}; & \text{(d)} \quad y &= (x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3}. \end{aligned}$$

9. Wyznacz kąty przecięcia się krzywych:

- (a) $y = 4 - x$ i $y = 4 - 0,5x^2$;
- (b) $y = \sin x$ i $y = \cos x$;
- (c) $y = e^x$ i $x = 0$;
- (d) $x^2 + y^2 = r^2$ i $y = 1$, ($r \geq 1$).

10. Dla funkcji f napisz wzór Taylora w otoczeniu punktu x_0 do rzędu n , tj. z resztą

$$r_n(f, x) = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!} (x - x_0)^n:$$

- (a) $y = \sin x$, $x_0 = 0$, $n = 5$;
- (b) $y = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$, $n = 4$;
- (c) $y = \exp(ax)$, $x_0 = 0$, $n = N + 1$;
- (d) $y(b) = (a + b)^4$, $x_0 = b_0 = 0$, $n = 4$.

11. Oszacuj dokładność proponowanych przybliżeń:

- (a) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, dla $|x| < \frac{\pi}{6}$;
- (b) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{1}{3}x^3$, dla $|x| < \frac{1}{10}$;
- (c) $\ln(1 + x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$, dla $|x| < \frac{1}{10}$;
- (d) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{4}$, dla $|x| < \frac{1}{10}$.

12. Uzasadnij nierówności; wykorzystaj wzór Taylora dla stosownie dobranej funkcji:

- (a) $e^x > x + 1$, dla $x \neq 0$;
- (b) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, dla $x \geq 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$;
- (c) $(1 + x)^{1+x} \geq 1 + x + x^2$, dla $x \geq 0$.

13. Oblicz wartości poniższych wyrażeń zadaną dokładnością:

- (a) e , $d = 10^{-3}$; (b) $\cos 0,2$, $d = 10^{-4}$; (c) $\sqrt[3]{1,003}$, $d = 10^{-3}$;
- (d) $\sin 10^\circ$, $d = 10^{-2}$; (e) $\text{☞} 0,98^{1,01}$, $d = 10^{-2}$; (f) $\text{☞} (1,01)^{0,51}$, $d = 10^{-1}$.

Zestaw 5. Całka nieoznaczona

1. Oblicz całki:

- (a) $\int \frac{(x^2 - 1)^3}{x} dx$; (b) $\int (1 + \sqrt[4]{x})^3 dx$; (c) $\int \frac{x - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}} dx$; (d) $\int \frac{(1 - x)^2}{x\sqrt{x}} dx$;
- (e) $\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$; (f) $\int \frac{\sqrt{u^3} + 1}{\sqrt{u} + 1} du$; (g) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$; (h) $\int \frac{e^{4x} - 1}{e^x - 1} dx$.

2. Oblicz podane całki; wykorzystaj twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie:

$$(a) \int \frac{x}{\sqrt{3-5x^2}} dx; \quad (b) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx; \quad (c) \int \frac{6x-7}{3x^2-7x+11} dx; \quad (d) \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx;$$

$$(e) \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx; \quad (f) \int \sqrt{3x+7} dx; \quad (g) \int \sin^m x \cos^3 x dx, m \in \mathbb{N}.$$

3. Oblicz podane całki; wykorzystaj twierdzenie o całkowaniu przez części:

$$(a) \int \arctg \sqrt{x} dx; \quad (b) \int \ln(x+1) dx; \quad (c) \int \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^2}} dx;$$

$$(d) \int x (\arctg x)^2 dx; \quad (e) \int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx; \quad (f) \int x^2 \ln(1+x) dx;$$

$$(g) \int \sin(\ln x) dx; \quad (h) \int (\arccos x)^3 dx; \quad (i) \int \cos x \ln(\operatorname{ctg} x) dx.$$

4. Oblicz całki z funkcji wymiernych:

$$(a) \int \frac{1}{(x+2)(x-5)} dx; \quad (b) \int \frac{4x-1}{x^2-x-2} dx; \quad (c) \int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx;$$

$$(d) \int \frac{1}{x^4-x^2} dx; \quad (e) \int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} dx; \quad (f) \int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} dx;$$

$$(g) \int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}; \quad (h) \int \frac{2x+1}{(1-x^2)(1+x)} dx; \quad (i) \int \frac{dx}{2x^2-x+1}.$$

5. Oblicz całki trygonometryczne:

$$(a) \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}; \quad (b) \int \sin 2x \cos 4x dx; \quad (c) \int \frac{dx}{1+4\cos x}; \quad (d) \int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x};$$

$$(e) \int \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} dx; \quad (f) \int \frac{(2\sin x + 3\cos x)}{\sin^2 x \cos x + 9\cos^3 x} dx; \quad (g) \int \sin x \sin 3x dx; \quad (h) \int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx.$$

6. Oblicz całki funkcji niewymiernych:

$$(a) \int \frac{x+1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} dx; \quad (b) \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{1}{x+1} dx; \quad (c) \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx;$$

$$(d) \int \frac{dx}{\sqrt{x-5} + \sqrt{x-7}}; \quad (e) \int \sqrt{x^2+4} dx; \quad (f) \int \frac{(x-2) dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(g) \int \frac{x^3+x^2+1}{\sqrt{x^2-9}} dx; \quad (h) \int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}} dx; \quad (i) \int \sqrt{\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}} dx;$$

$$(j) \int \frac{\sqrt{1+x}(x^2-1)}{\sqrt{1-x}} dx; \quad (k) \int \frac{2x^2+x+2}{\sqrt{1+x^2}} dx; \quad (l) \int \frac{-\sin 4x}{\sqrt{6+2\cos 2x}} dx.$$

7. Oblicz całki:

$$(a) \int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x dx; \quad (b) \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2-1)^2} dx; \quad (c) \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx.$$

8. Wyprowadź wzory rekurencyjne (względem n) na podane całki:

$$(a) \int x^\alpha \ln^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (b) \int \sin^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (c) \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

9. Dla całek postaci $\int x^p (ax^q + b)^r dx$, gdzie $p, q, r \in \mathbb{Q}$ stosuje się następujące podstawienia:

- jeżeli $r \in \mathbb{Z}$ – podstawiamy $x = t^s$, gdzie s to najmniejszy wspólny mianownik ułamków p i q ;
- jeżeli $\frac{p+1}{q} \in \mathbb{Z}$ – podstawiamy $ax^q + b = t^s$, gdzie s – mianownik r ;
- jeżeli $\frac{p+1}{q} + r \in \mathbb{Z}$ – podstawiamy $a + \frac{b}{x^q} = t^s$, gdzie s – mianownik ułamka r .

Stosując powyższe podstawienia oblicz całki:

$$(a) \int \sqrt{x^3 + x^4} dx; \quad (b) \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx; \quad (c) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}.$$

Zestaw 6. Całka oznaczona

1. Oblicz podane całki oznaczone:

$$(a) \int_0^\pi x \sin x dx; \quad (b) \int_0^{\ln 3} x e^{-x} dx; \quad (c) \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx; \quad (d) \int_0^1 e^x \sin \pi x dx;$$
$$(f) \int_{-1/2}^{\sqrt{3}/2} \arcsin x dx; \quad (g) \int_0^2 [x^2] \sqrt{1+x} dx; \quad (h) \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}; \quad (i) \int_{-2}^2 |x| e^{|x-1|} dx.$$

2. Oblicz podane całki; wykorzystaj definicję całki oznaczonej Riemanna:

$$(a) \int_{-1}^3 2x dx; \quad (b) \int_0^2 x dx; \quad (c) \int_1^4 (1-3x) dx; \quad (d) \int_{-1}^0 e^x dx; \quad (e) \int_2^4 \frac{dx}{x}.$$

3. Wyznacz granice podanych ciągów:

$$(a) a_n = \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5};$$
$$(b) a_n = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4n} + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{4n} + \dots + \operatorname{tg} \frac{n\pi}{4n}}{n};$$

- (c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}};$
- (d) $a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{3n};$
- (e) $a_n = \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}};$
- (f) $a_n = \frac{1}{n^2 + 1^2} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{1}{2n^2};$
- (g) $a_n = \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right);$
- (h) $a_n = \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^n}}{n};$
- (i) $a_n = \frac{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2}}{n^2};$
- (j) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$

4. Korzystając z definicji zbadaj zbieżność całek:

- (a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2};$ (b) $\int_0^{+\infty} 2^{-x} dx;$ (c) $\int_{\pi}^{+\infty} x \sin x dx;$ (d) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^3} dx;$
- (e) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}};$ (f) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\sin x};$ (g) $\int_0^e \frac{\sin \ln x}{x} dx;$ (h) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3 - x}.$

5. Zbadaj zbieżność podanych całek; wykorzystaj jedno z kryteriów porównawczych:

- (a) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x dx;$ (b) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{3x}}{e^{4x} - 5} dx;$ (c) $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \cos x};$ (d) $\int_0^1 \frac{e^x}{(x-1)^2} dx;$
- (e) $\int_5^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^5 - 3}};$ (f) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\pi^x - 1} dx;$ (g) $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\pi^x - 1} dx;$ (h) $\int_1^{+\infty} x \sin \frac{1}{x} dx.$

Zestaw 7. Całka oznaczona – zastosowanie

I. Pole figury płaskiej:

(a) Niech Γ oznacza krzywą o parametryzacji $(x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, gdzie $x \in \mathcal{C}_{[t_1, t_2]}^1$, $y \in \mathcal{C}_{[t_1, t_2]}$ oraz $x'(t)y(t) \neq 0$ dla $t \in [t_1, t_2]$ (tj. x jest funkcją monotoniczną, a y ma stały znak). Wówczas pole P figury ograniczonej krzywą Γ , osią O_x oraz prostymi $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ wyraża się wzorem:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} |y(t) x'(t)| dt. \quad (1)$$

(b) Niech Γ oznacza krzywą o parametryzacji $r = f(\theta)$, gdzie $f \geq 0$, $f \in \mathcal{C}_{[\alpha, \beta]}$ oraz $0 < \beta - \alpha < 2\pi$. Wówczas pole obszaru ograniczonego łukiem f oraz promieniami wodzącymi o amplitudach α, β wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta. \quad (2)$$

1. Oblicz pola figur ograniczonych podanymi krzywymi ($a, b > 0$):

- (a) $y = x^2 - 6x + 7$ oraz $y = 3 - x$;
- (b) $x(t) = a \cos(t)$, $y(t) = b \sin(t)$; $t \in [0, 2\pi]$;
- (c) $x(t) = a(2 \cos(t) - \cos(2t))$, $y(t) = a(2 \sin(t) - \sin(2t))$; $t \in [0, 2\pi]$;
- (d) $r(\phi) = a \cos^2(\phi)$, dla $0 \leq \phi \leq \pi$;
- (e) $r(\phi) = a(1 + \cos \phi)$, dla $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

II. Długość krzywej:

(a) Niech Γ będzie krzywą o parametryzacji $(x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$ gdzie $x, y \in \mathcal{C}_{[t_1, t_2]}^1$, która nie posiada punktów wielokrotnych. Wówczas długość łuku Γ wyraża się wzorem:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (3)$$

(b) Niech Γ będzie krzywą o parametryzacji $r = f(\theta)$, $f \in \mathcal{C}_{[\alpha, \beta]}^1$, która nie posiada punktów wielokrotnych. Wówczas długość łuku Γ wyraża się wzorem:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta. \quad (4)$$

2. Oblicz długości podanych krzywych:

- (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$;
- (b) $x(t) = a \cos^3 t$, $y(t) = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$;
- (c) $r(\phi) = a(1 + \cos \phi)$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

III. Objętość bryły obrotowej:

Niech Γ oznacza krzywą o parametryzacji $(x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, gdzie $x \nearrow$ lub $x \searrow$, $y \neq 0$, $x, y \in \mathcal{C}_{[t_1, t_2]}^1$. Wówczas objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót Γ dookoła osi Ox w przedziale $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ wyraża się wzorem:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) dt. \quad (5)$$

IV. Pole powierzchni bryły obrotowej:

Niech Σ oznacza krzywą o oparametryzacji $(x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, gdzie $x \nearrow$ lub $x \searrow$, $y \geq 0$, $x, y \in \mathcal{C}_{[t_1, t_2]}^1$. Wówczas pole powierzchni bocznej bryły obrotowej powstałej przez obrót Σ dookoła osi Ox w przedziale $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ wyraża się wzorem:

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (6)$$

3. Wyznacz objętość oraz pole powierzchni (bocznej) figury:
- kuli o promieniu R ;
 - walca o wysokości h i promieniu R ;
 - stożka o wysokości h i promieniu R ;
 - obrotowego stożka ściętego o promieniach podstaw r_1 oraz r_2 i wysokości h .
4. Oblicz pola powierzchni powstałych przez obrót dookoła osi Ox krzywych o równaniach:
- $y^2 = 4ax, 0 \leq x \leq 3a$;
 - $x^2 + (y - b)^2 = a^2 \ (a < b)$;
 - $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;
 - $x(t) = a(2 \cos t - \cos 2t), y(t) = a(2 \sin t - \sin 2t), 0 \leq t \leq \pi$;
 - $x(t) = a(\cos t + t \sin t), y(t) = a(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq \pi$.

Zestaw 8. Szeregi liczbowe; szeregi potęgowe

1. Dla podanych szeregów wyznacz ich sumy częściowe S_N :

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}; \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

2. Zbadaj zbieżność podanych szeregów liczbowych:

$$\begin{array}{llll} (a) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}; & (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n}; & (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n^2}; & (d) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}; \\ (e) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}; & (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}; & (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{2^{n/2} (n!)^2}; & (i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{4^n n!}; \\ (j) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right); & (k) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{n^2 - 1}; & (l) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \ln(1+n); & (m) \sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{1}{n^2}; \\ (n) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\sqrt{(2n)^n}}; & (o) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln \ln n}; & (p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; & (r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{1/n}. \end{array}$$

3. Wyznacz przedziały zbieżności podanych szeregów potęgowych:

$$\begin{array}{llll} (a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-3x)^n}{3^n + 2^n}; & (b) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} (x+1)^n; & (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} (x+2)^n; & (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}; \\ (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}; & (f) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n \ln^2 n}; & (g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} x^{2n}}{n 4^n}; & (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n \sqrt{n}}. \end{array}$$

4. Uzasadnij poniższe równości:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, dla $|x| < 1$;
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, dla $|x| < 1$;
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \operatorname{arctg} x$, dla $|x| < 1$.

5. Oblicz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n}$; (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)2^n}$.

6. Podaną funkcję przedstaw jako sumę szeregu potęgowego w zadanym przedziale:

- (a) $f(x) = \frac{1}{2+3x}$, dla $|x| < \frac{2}{3}$; (b) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x-3}$, dla $|x+1| < 2$;
(c) $f(x) = \sin^2 x$, dla $x \in \mathbb{R}$; (d) $f(x) = \sinh^2 x$, dla $x \in \mathbb{R}$;
(e) $f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x}$, dla $|x+1| < 1$; (f) $f(x) = \ln(x^2+2x+3)$, dla $|x+1| < \sqrt{2}$.

Zestaw 9. Ciągłość i różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

1. Przedstaw graficznie dziedziny (naturalne) podanych funkcji:

(a) $f(x, y) = \frac{\sqrt{y+1}}{(x-2)}$; (b) $f(x, y) = \log_{x^2+y^2}(1-x^2-y^2)$; (c) $f(x, y) = \sqrt{\ln \cos(x-y)}$.

2. Jakie powierzchnie w układzie O_{xyz} opisane są poniższymi zależnościami?

(a) $y = x^2 - 2x + 3$; (b) $x^2 + y^2 = 1$; (c) $2x + y - z + 1 = 0$; (d) $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$;
(e) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; (f) $z = 4x^2 + y^2$; (g) $z = 1 - 3x^2 - 3y^2$; (h) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

3. Wyznacz poniższe granice:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$; (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$;
(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{xy^2}$; (e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{|x| + |y|}$; (f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (x^y + y)^{1/y}$;
(h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}$; (i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x|^y$; (j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2 - 1}{(y - 2)^2}$;
(k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x \sin y)}{xy}$; (l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1, \frac{\pi}{2})} \frac{\cos xy}{(y - \frac{\pi}{2})^2}$; (m) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(x+y+z)}{x^2 + y^2 + z^2}$.

4. Zbadaj ciągłość podanych funkcji:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{|x|y + x|y|}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{(b)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{e^{x^2 + y^2} - 1} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{(d)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
 \text{(e)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\sin|x+y|}{|x| + |y|} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{(f)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \sqrt{x^4 + y^2} & \text{dla } x > 0 \\ x \cos x + y & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

5. Wyznacz wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których podane funkcje są ciągłe:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} (ax + b) \frac{\sin y}{y} & \text{dla } y \neq 0 \\ x & \text{dla } y = 0 \end{cases} ; & \text{(b)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy(x + ay)}{x - y} & \text{dla } x \neq y \\ x^2 & \text{dla } x = y \end{cases} ; \\
 \text{(c)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - 1 & \text{dla } x^2 + y^2 \geq 1 \\ ax + by & \text{dla } x^2 + y^2 < 1 \end{cases} ; & \text{(d)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{b \sin axy}{xy} & \text{dla } xy \neq 0 \\ a & \text{dla } xy = 0 \end{cases} .
 \end{aligned}$$

6. Wyznacz pochodne cząstkowe f'_x oraz f'_y podanych funkcji:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x, y) &= \frac{\sin x + \cos y}{\sin x - \cos y} + x^{y^2 + 2y}; & \text{(b)} \quad f(x, y, z) &= \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}; \\
 \text{(c)} \quad f(x, y) &= \sqrt{|xy|}; & \text{(d)} \quad f(x, y) &= xy \operatorname{sgn}(xy); \\
 \text{(e)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} ; & \text{(f)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } xy = 0 \\ 1 & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases} .
 \end{aligned}$$

7. Zbadaj różniczkowalność podanych funkcji:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} ; \\
 \text{(b)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} ; \\
 \text{(c)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} .
 \end{aligned}$$

8. Sprawdź, czy poniższe funkcje spełniają warunek $f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0)$:

$$\text{(a)} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} ;$$

$$(b) \ f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

9. Wyznacz pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach oraz kierunkach:

- (a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\vec{v} = (-3/5, -4/5)$;
- (b) $f(x, y) = x \ln y + y \ln x$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0)$;
- (c) $f(x, y) = |x - y|$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $\vec{v} = (3/5, 4/5)$;
- (d) $f(x, y) = 2|x| + |y|$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\vec{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Zestaw 10. Wzór Taylora, ekstrema funkcji wielu zmiennych

1. Dla podanych funkcji wyznacz:

- (a) $df_{(1,1)}(h_1, h_2)$, gdzie $f(x, y) = x \ln |y| + x^y$;
- (b) $df_{(0,0,0)}(h_1, h_2, h_3)$, gdzie $f(x, y, z) = xyz + x^2yz^2 + \ln(x + y + z + 1)$;
- (c) $d^2f_{(0,0)}(h_1, h_2)$, gdzie $f(x, y) = xy + x^3 \ln(y + 1) + y^4 \operatorname{tg} x$.

2. Dla podanych funkcji zapisz rozwinięcie Taylora do rzędu n w otoczeniu punktu A :

- (a) $f(x, y) = x^2y + xy + y^3$, $n = 3$, $A = (0, 1)$;
- (b) $h(x, y, z) = (x + y + z)^3$, $n = 3$, $A = (0, 0, 0)$;
- (c) $g(x, y, z) = xy \ln z + x^z \cos y$, $n = 2$, $A = (1, 0, 1)$;
- (d) $k(x, y, z) = x^{y^z}$, $n = 2$, $A = (1, 1, 1)$.

3. Oblicz przybliżone wartości podanych wyrażeń; wykorzystaj rozwinięcie Taylora do rzędu drugiego odpowiedniej funkcji:

$$(a) \frac{\operatorname{arctg} 0,9}{\sqrt{4,02}}; \quad (b) 1,02 \sin\left(\frac{\pi}{6} + 0,1\right); \quad (c) 0,98^{1,01}; \quad (d) \ln(1,05) \operatorname{tg}(46^\circ).$$

4. Wyznacz ekstrema lokalne podanych funkcji:

- (a) $f(x, y) = 3(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2$;
- (b) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$;
- (c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
- (d) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$.

5. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w podanych obszarach:

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $|x| + |y| \leq 2$;
- (b) $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ w trójkącie ograniczonym osiami Ox , Oy oraz prostą $x + y = 2\pi$;

(c) $f(x, y) = xy, (x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.

6. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x, y) = \frac{4xy}{x^2 + y^2}$.

7. Oblicz odległość początku układu współrzędnych od:

(a) płaszczyzny $\pi : x - 2y + 3z - 6 = 0$; (b) powierzchni $\gamma : z = \sqrt{(x + 2)(y - 1)}$.

8. Spośród wszystkich trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu r wybierz ten o największym polu.

9. Znajdź największą wartość iloczynu trzech nieujemnych liczb, których suma ma stałą wartość równą $3c$.

Zestaw 11. Funkcje uwikłane, ekstrema warunkowe

1. Zbadaj, czy podane równanie jednoznacznie określa ciągłą funkcję uwikłaną $y = y(x)$ w otoczeniu wskazanych punktów:

(a) $x^3 + x - y^3 - y = 0, (2, 2)$;

(b) $x^y = y^x, A(2, 4), B(e, e), C(3, 3)$;

(c) $x - \sin y = 0, A(\sqrt{2}/2, \pi/4), B(1, \pi/2)$;

(d) $x^2 = y^2, A(1, 1), B(0, 0)$.

2. Wyznacz styczne do krzywych we wskazanych punktach:

(a) $x^3 + x - y^3 - y = 0, A(2, 2)$;

(b) $x^2 + y^2 - 3xy + x = 0, B(1, 1)$;

(c) $xe^y + ye^x = e^{xy}, C(1, 0)$.

3. Dla podanych funkcji uwikłanych $y = y(x)$ wyznacz $y''(x)$:

(a) $x^2 + y^2 - 3xy = 0$;

(b) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$;

(c) $xe^y - y + 1 = 0$.

4. Znajdź przybliżenie podanej funkcji uwikłanej $y = y(x)$ wielomianem stopnia n w otoczeniu punktu (x_0, y_0) ; zastosuj wzór Taylora:

(a) $e^{xy} - x^2y - 1 = 0, n = 2, (x_0, y_0) = (2, 0)$;

(b) $e^{xy} - x = 0, n = 2, (x_0, y_0) = (1, 0)$;

(c) $\ln(y + x^3 + xy^3) - x^3 = 1 + xy^3, n = 2, (x_0, y_0) = (0, e)$;

(d) $x^4 + \frac{4}{y^2} + \frac{4x^2}{y} - 1 = 0, n = 3, (x_0, y_0) = (-1, -1)$.

5. Znajdź ekstrema podanych funkcji uwikłanych y zmiennej x :

(a) $x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0$;

(b) $x^5 + y^4 = 20xy^2$;

(c) $x^2e^y - y^4 + 1 = 0$;

(d) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 4 = 0$.

6. Wyznacz ekstrema lokalne podanych funkcji przy zadanych warunkach:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 2$, $2x^2 + y^2 = 4$;

(b) $f(x, y) = \ln x + \ln y + xy$, $x^2y^2 - x^4 - 1 = 4x^3 + 6x^2 + 4x$;

(c) $f(x, y) = x + y$, $e^{x+y} - xy - 1 = 0$;

(d) $f(x, y) = y - \ln x$, $x^2 + (y - 2)^2 - 2 = 0$

(e) $f(x, y) = x + 2y$, $x^2 + y^2 = 5$;

(f) $f(x, y, z) = x + y + 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

(g) $f(x, y, z) = xyz$, $x + y + z = 1$;

(h) $f(x, y, z) = x + y + z$, $xyz = 1$.

Zestaw 12. Całki wielokrotne

1. Oblicz poniższe całki po podanych zbiorach:

(a) $\iint_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$, $R = [0, 2] \times [0, 1]$;

(b) $\iint_R xy \ln \frac{x}{y} dxdy$, $R = [1, e] \times [1, 2]$;

(c) $\iint_R e^{x-y} dxdy$, R – trójkąt o wierzchołkach $(1, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$;

(d) $\iiint_R z^2 e^{x-y} dxdydz$, R – czworościan o wierzchołkach $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$.

(e) $\iiint_R \frac{dxdydz}{\sqrt{x+y+z+1}}$, $R = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$.

2. W podanych całkach zamień kolejność całkowania:

(a) $\int_{-1}^1 \int_0^{|x|} f(x, y) dy dx$; $\int_0^4 \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$.

3. Oblicz podane całki; zastosuj współrzędne biegunowe:

(a) $\iint_D xy dx dy$, $D = \{(x, y) : x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$;

(b) $\iint_D x^2 + y^2 dx dy$, $D = \{(x, y) : y \geq 0, y \leq x^2 + y^2 \leq x\}$.

4. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

(a) $y^2 = 4x$, $x + y = 3$; (b) $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

5. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

(a) $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$; (b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$.

6. Całkę potrójną $\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz$ zamień na całkę iterowaną, jeżeli U jest obszarem ograniczonym przez powierzchnie:

(a) $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 6$;

(b) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z = 4$ ($z \geq 4$);

(c) $z = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$.

7. Oblicz podane całki; wykorzystaj współrzędne walcowe lub sferyczne:

(a) $\iiint_U (x^2 + y^2 + z^2)^2 dx dy dz$, $U : x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 1$;

(b) $\iiint_U xyz dx dy dz$, $U : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

(c) $\iiint_U x^2 + y^2 dx dy dz$, $U : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$;

(d) $\iiint_U \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $U : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$;

(e) $\iiint_U x^2 dx dy dz$, $U : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4x$.

Zestaw 13. Całki krzywoliniowe i powierzchniowe

1. Oblicz podane całki krzywoliniowe nieskierowane:

(a) $\int_K ye^{-x} dl$, gdzie K jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach: $A(0, 0)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 1)$;

- (b) $\int_K \sqrt{x^2 + y^2 + 4} dl$, gdzie K jest krzywą: $x(t) = 2t \cos t$, $y(t) = 2t \sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$;
- (c) $\int_K x - y dl$, gdzie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y - x + 2 = 0, x \in [0, 4]\}$;
- (d) $\int_K 4\sqrt{y} dl$, gdzie K jest łukiem paraboli $y = (x + 1)^2$, $x \in [-1, 1]$;
- (e) $\int_K dl$, gdzie K jest krzywą powstałą w wyniku przecięcia się powierzchni $4z^2 = x^2 + y^2$ oraz $x^2 + y^2 + 5z^2 = 9$ (dla $z \geq 0$).

2. Oblicz podane całki krzywoliniowe skierowane:

- (a) $\int_K x dx + y dy$, gdzie K jest zorientowanym dodatnio brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(2, 0)$;
- (b) $\int_K \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$, gdzie K jest elipsą $\frac{x^2}{4} + y^2 = 4$ zorientowaną ujemnie;
- (c) $\int_K x e^y dx + y e^x dy$, gdzie K jest łukiem paraboli $x = y^2$, $y \in [-1, 1]$ zorientowanym od punktu $(1, -1)$ do punktu $(1, 1)$;
- (d) $\int_K z dx + y dz + x dy$, gdzie K jest łukiem przestrzennym $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = t^2 - 1$, $z(t) = t$, $t \in [0, 1]$ zorientowanym od punktu $(2, 0, 1)$ do punktu $(1, -1, 0)$;
- (e) $\int_K x^2 y^2 dx$, gdzie K jest brzegiem kwadratu $|x| + |y| \leq 4$ zorientowanym dodatnio.

3. Oblicz podane całki; jeżeli to możliwe zastosuj twierdzenie Greena:

- (a) $\int_K y dx + (x + y) dy$, gdzie K jest zorientowanym dodatnio brzegiem figury ograniczonej krzywymi: $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 4$;
- (b) $\iint_G x^2 + y^2 dx dy$, gdzie $G = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2; x^2 \leq y \leq e^x\}$;
- (c) $\int_K xy dx + \left(\frac{1}{2}x^2 + \cos y\right) dy$, gdzie K jest krzywą o parametryzacji

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \frac{2 \operatorname{arctg}(\log_3(2 \sin^2 t + 1))}{\sin t + 1} \end{cases},$$

$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, zorientowaną od punktu $(0, 0)$ do punktu $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$;

- (d) $\iint_G 2dxdy$, gdzie G jest czworokątem o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(0,2)$, $C(1,1)$, $D(1,0)$;
- (e) $\int_K \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, gdzie K jest okręgiem $x^2 + y^2 = 1$ zorientowanym dodatnio.

4. Oblicz podane całki powierzchniowe niezorientowane:

- (a) $\iint_S x^2 \sqrt{1 + 2z} dS$, gdzie S jest częścią powierzchni $z = \frac{1}{2}y^2$ zawartą między powierzchniami $|x| + |y| = 2$, $z = 0$;
- (b) $\iint_S xyz dS$, gdzie S jest poboczną walca o promieniu $r = 2$, środku w punkcie $(0,0,0)$ zawartą między płaszczyznami $z = 0$ oraz $z = 4$;
- (c) $\iint_S z dS$, gdzie S jest czworościanem ograniczonym płaszczyznami $x + y + z = 1$, $2x = 1$, $2y = 1$, $2z = 1$;
- (d) $\iint_S 2dS$, gdzie S jest powierzchnią $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 1$;
- (e) $\iint_S \arctg(x^2 + y^2 + z^2 - 8) dS$, gdzie S jest częścią powierzchni $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ zawartą w walcu $x^2 + y^2 = 5$.

5. Oblicz podane całki powierzchniowe zorientowane:

- (a) $\iint_S ydydz - xdzdx + xydxdy$, gdzie S jest dodatnio zorientowaną powierzchnią określoną zależnościami $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$;
- (b) $\iint_S \ln x dydz + \ln y dzdx + \ln z dxdy$, gdzie S jest dodatnio zorientowaną powierzchnią określoną zależnościami $z = x + y$, $x > 1$, $y > 1$, $x + y < 4$;
- (c) $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)^2 dydz$, gdzie S jest dodatnio zorientowaną powierzchnią określoną zależnościami $z = 2\sqrt{x^2 + 4y^2}$, $x^2 + 4y^2 \leq 4$;
- (d) $\iint_S xy - x^2 y dydz + y^2 z dzdx - (z - x) y dxdy$, gdzie S jest dodatnio zorientowaną powierzchnią $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq \sqrt{5}$.

6. Oblicz podane całki; jeżeli to możliwe zastosuj twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego lub twierdzenie Stokesa:

- (a) $\oint_C xz^2 dx + zy^2 dy + yx^2 dz$, gdzie C jest zorientowanym dodatnio brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$;

- (b) $\iint_S xydydz + yzdx dz + xzdx dy$, gdzie S jest wewnętrzną stroną powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,
 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;
- (c) $\oint_C (x + z) dx + \sin(y + z) dy + \cos z dz$, gdzie C jest zorientowaną ujemnie krzywą powstałą
w wyniku przecięcia walca $x^2 + y^2 = 4$ i płaszczyzny $x + y + z = 1$;
- (d) $\iint_S (x + y + z) dx dz$, gdzie S jest brzegiem czworościanu o wierzchołkach $(0, 0, 0), (1, 0, 0),$
 $(0, 1, 0), (1, 1, 1)$ zorientowanym dodatnio.

7. Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie zamkniętą powierzchnią gładką. Co mierzy całka

$$\frac{1}{3} \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy?$$

Trygonometria

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin x \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}, \quad \cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}, \quad \sin x \cos y = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$$

Całka nieoznaczona

$$\int \frac{1}{x^2 + k^2} dx = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{x}{k} + c, \quad \int \frac{1}{x^2 - k^2} dx = \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{x-k}{x+k} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + c, \quad \int \frac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{k} + c$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx$$

Całka oznaczona

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

Całka oznaczona – zastosowanie

Pole P figury płaskiej, długość l krzywej, pole S powierzchni obrotowej, objętość V bryły obrotowej:

$$P = \int_a^b |f(x)| dx = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)x'(t)| dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r(\varphi))^2 d\varphi$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2 x'(t) dt$$

Całki wielokrotne

Współrzędne biegunowe, walcowe, sferyczne:

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \\ r \geq 0, \alpha \in [0, 2\pi) \\ J = r \end{cases}, \quad \begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \\ z = z \\ r \geq 0, \alpha \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R} \\ J = r \end{cases}, \quad \begin{cases} x = r \cos \alpha \cos \beta \\ y = r \cos \alpha \sin \beta \\ z = r \sin \alpha \\ r \geq 0, \alpha \in [-\pi/2, \pi/2], \beta \in [0, 2\pi) \\ J = r^2 \cos \alpha \end{cases}$$

Pole figury płaskiej P , objętość bryły Ω , masa bryły Ω o gęstości ρ :

$$|P| = \iint_P 1 dx dy, \quad |\Omega| = \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz, \quad m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{Pole płata powierzchniowego } z = f(x, y) \text{ dla } (x, y) \in D: |S| = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy$$