
Zestaw 1. Liczby zespolone

1. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiory:

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z + 2| < 4\}, & B &= \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = |z - 1|\}, \\ C &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(iz - 1) \leq 2\}, & D &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) \operatorname{Im}(z^2) < 0\}, \\ E &= \{z \in \mathbb{C} : \arg(z + iz) = \pi\}, & F &= \{z \in \mathbb{C} : \pi/2 < \arg(z^3) < 3\pi/2\}. \end{aligned}$$

2. Wykaż, że dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ prawdziwa jest nierówność

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

3. Przedstaw w postaci trygonometrycznej i wykładniczej liczby zespolone

$$(a) -3 + 3i, \quad (b) \frac{\sqrt{3} - i}{-1 - i}, \quad (c) \sin \alpha + i \cos \alpha, \quad (d) 1 + i \operatorname{tg} \alpha, \quad \alpha \neq \pi/2 + k\pi.$$

4. Wyznacz części rzeczywiste oraz urojone liczb

$$(a) (-\sqrt{3} + i)^{10}, \quad (b) \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{i - 1}\right)^{12}, \quad (c) \left(1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^6, \quad (d) \left(\sin \frac{\pi}{7} - i \cos \frac{\pi}{7}\right)^{14}.$$

5. Podane liczby zapisz w postaci trygonometrycznej ($n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$):

$$(a) -(\cos x + i \sin x)^n, \quad (b) (\sin x + i \cos x)^n, \quad (c) (\sin x - i \cos x)^n, \quad (d) (\cos x + i \cos x)^n.$$

6. Wyznacz zbiory

$$(a) \sqrt{1 - \sqrt{3}i}, \quad (b) \sqrt[3]{-64}, \quad (c) \sqrt[4]{(2 - i)^8}, \quad (d) \sqrt{3 + 4i}.$$

7. Niech $n \geq 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną. W zbiorze liczb zespolonych równanie $z^n = 1$ posiada n różnych rozwiązań $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$. Wyznacz:

$$\begin{aligned} (a) w_1 &= \varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{n-1}; \\ (b) w_2 &= \varepsilon_0 \cdot \dots \cdot \varepsilon_{n-1}; \\ (c) w_3 &= (i + \varepsilon_0) \cdots (i + \varepsilon_{n-1}). \end{aligned}$$

8. Niech $\{z_0, z_1, \dots, z_9\} = \sqrt[10]{\cos 1 + i \sin 1}$. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{|z_0| + 2|z_1| + 3|z_2| + 4|z_3| + 5|z_4|}{z_5^{20} + 2z_6^{20} + 3z_7^{20} + 4z_8^{20} + 5z_9^{20}} \cdot (-\sin 2 + i \cos 2).$$

9. Jednym z wierzchołków sześciokąta foremnego jest $w_0 = \sqrt{3} + i$. Wyznacz pozostałe jego wierzchołki wiedząc, że środek leży w punkcie: (a) $s_0 = 0$; (b) $s_0 = 2\sqrt{3} + i$.

10. ☞ Wykaż, że w ciągu $a_n = \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n$ nie występują dwa identyczne wyrazy.

11. Wyznacz miejsca zerowe wielomianu $W(z) = z^3 - (2 + 3i)^9$.

12. Rozwiąż równanie:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} z^5 + z^4 + (i-1)z + i - 1 = 0, & \text{(b)} z^4 + 4z^2 + 8 = 0, \\ \text{(c)} (z^2 + 1 + i)^4 + (1 + 2i)^4 = 0, & \text{(d)} (z+1)^n - (z-1)^n = 0. \end{array}$$

13. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu

$$W(z) = z^6 + 2z^5 + 4z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 2z + 2,$$

którego podwójnym pierwiastkiem jest $z_0 = i$. Następnie przedstaw wielomian W w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych możliwie niskich stopni.

14. Liczba $z_0 = 5 + 2i$ jest jednym z pierwiastków wielomianu

$$W(z) = (z^3 - 11z^2 + 39z - 29)(z^4 - (2-i)^{12});$$

wyznacz pozostałe jego pierwiastki oraz wybierz z nich te, które leżą w drugiej ćwiartce płaszczyzny zespolonej.

15. Liczby z_1, z_2, z_3 to pierwiastki wielomianu $f(z) = -z^3 + 3z^2 + 1$. Znajdź wartość wyrażenia

$$w = (1 + iz_1)(1 + iz_2)(1 + iz_3).$$

16. Liczby z_1, z_2, z_3, z_4 to pierwiastki wielomianu

$$f(z) = -z^4 + (1+i)z^3 + iz + 1.$$

Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniających warunek

$$\sum_{k=1}^4 |\lambda + z_k|^2 < \sum_{k=1}^4 |\bar{\lambda} + z_k|^2.$$

17. ☞ Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu

$$w(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{2n};$$

następnie przedstaw go jako iloczyn rzeczywistych wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.

18. Rozwiąż równanie:

$$\text{(a)} z^7 = \bar{z}(1-i), \quad \text{(b)} \overline{z z^4} = z|z|^2, \quad \text{(c)} \bar{z} z^4 = |z|^2 \bar{z}^3, \quad \text{(d)} |z|^2 \bar{z} = -iz^2.$$

Zestaw 2. Elementy teorii liczb

1. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznacz największe wspólne dzielniki $\text{NWD}(a, b)$ liczb a, b oraz przedstaw je jako kombinacje całkowitoliczbowe, tj. $\text{NWD}(a, b) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Wskaż pary liczb względnie pierwszych.

(a) $a = 252, b = 231$, (b) $a = 924, b = 1105$, (c) $a = 2891, b = 1589$, (d) $a = 645, b = 363$.

2. Uzasadnij, że istnieją liczby całkowite x, y spełniające poniższe równanie

$$412x + 119y = 1;$$

wyznacz przykładową parę takich liczb.

3. Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczby $5n + 3$ oraz $7n + 4$ są względnie pierwsze.
4. Uzasadnij, że liczba naturalna jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr w rozwinięciu dziesiętnym jest liczbą podzielną przez 3. Sformułuj i uzasadnij cechy podzielności liczby naturalnej przez 9 oraz przez 11.
5. Klasyczna cecha podzielności liczby naturalnej przez 7 jest mało wygodna do sprawdzania: liczba jest podzielna przez 7, jeśli różnica między liczbą składającą się z trzech ostatnich jej cyfr, a liczbą wyrażoną pozostałymi jej cyframi (lub odwrotnie) dzieli się przez 7.

Wykaż, że liczba naturalna jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr w rozwinięciu ósemkowym jest liczbą podzielną przez 7. Wykorzystując to kryterium sprawdź podzielność przez 7 liczby 812.

6. Rozwiąż kongruencje:

(a) $7x = 3 \pmod{12}$, (b) $10x = 13 \pmod{23}$, (c) $6x = 9 \pmod{45}$, (d) $12x = 2 \pmod{8}$.

7. Rozwiąż układ kongruencji:

(a) $\begin{cases} x = 4 \pmod{6} \\ x = 5 \pmod{35} \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x = 4 \pmod{5} \\ x = 3 \pmod{7} \\ x = 2 \pmod{9} \end{cases}$, (c) $\begin{cases} 3x = 2 \pmod{4} \\ 4x = 1 \pmod{5} \\ x = 1 \pmod{3} \end{cases}$.

8. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez 4, 13 oraz 7 daje odpowiednio reszty 1, 2 oraz 1.
9. Jeśli podzielić czekoladę na cztery równe części, zostaną dwie kostki; przy podziale na pięć części pozostaną cztery kostki, a przy podziale na trzy części pozostanie jedna kostka. Ile kostek pozostanie przy podziale czekolady na dziesięć równych części?

Zestaw 3. Grupy, pierścienie, ciała

- Sprawdź, czy poniższe pary tworzą grupę abelową:
 - zbiór $\mathbb{Z}$ z działaniem $x \circ y = (-1)^x y + (-1)^y x$;
 - zbiór $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ z działaniem $a \circ b = a^{\ln b}$;
 - zbiór $\mathbb{C}$ z działaniem $w \circ z = w + z + iwz$;
 - zbiór $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ z działaniem $w \circ z = w + z + iwz$.
- Wyznacz rząd grupy: (a) $\mathbb{Z}_{120}^*$, (b) $\mathbb{Z}_{93}^*$, (c) $\mathbb{Z}_{200}^*$.
- Wyznacz element odwrotny dla elementu
 - 4 w $\mathbb{Z}_7^*$,
 - 35 w $\mathbb{Z}_{101}^*$,
 - 11 w $\mathbb{Z}_{31}^*$,
 - 24 w $\mathbb{Z}_{29}^*$,
 - 11 w $\mathbb{Z}_{120}^*$.
- Znajdź wszystkie podgrupy grupy: (a) $\mathbb{Z}_6$, (b) $\mathbb{Z}_6^*$, (c) $\mathbb{Z}_8^*$.
- Wypisz wszystkie elementy grupy i podaj ich rzędy: (a) $\mathbb{Z}_5^*$, (b) $\mathbb{Z}_9^*$, (c) $\mathbb{Z}_{15}^*$.
- Sprawdź, czy grupy z poprzedniego zadania są cykliczne oraz wyznacz wszystkie generatory tych z nich, które są cykliczne.
- Sprawdź, czy zbiór $\mathbb{Z}$ z działaniem $n \circ k = n + k + 1$ tworzy grupę cykliczną; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz wszystkie jej generatory.
- Wyznacz trzy ostatnie cyfry liczby: (a) 17^{2002} , (b) $7^{4004} - 3^{4004}$.
- Korzystając z twierdzenia Eulera oblicz: $13^{26} \pmod{20}$, $7^{74} \pmod{30}$, $5^{40} \pmod{18}$.
- Korzystając z małego twierdzenia Fermata oblicz: $15^{54} \pmod{53}$, $15^{16} \pmod{17}$.
- Sprawdź, która z poniższych struktur algebraicznych jest pierścieniem, pierścieniem przemiennym, pierścieniem z jednością, pierścieniem całkowitym, ciałem, ciałem przemiennym:
 - zbiór wielomianów rzeczywistych z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia wielomianów;
 - zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych;
 - $(A, \star, \bullet)$, gdzie $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < 1\}$ oraz $a \star b = \min(a, b)$, $a \bullet b = \max(a, b)$;
 - $(\mathbb{R}[x]_1, +, \circ)$, gdzie $+$ oraz $\circ$ oznaczają dodawanie oraz składanie funkcji.
- Wykaż, że w dowolnym pierścieniu z jednością dzielnikami zera mogą być jedynie te elementy, które nie posiadają elementu odwrotnego.
- Wykaż, że jeżeli działanie wewnętrzne posiadające element neutralny jest łączne, to każdy element posiada co najwyżej jeden element symetryczny.

14. W zbiorze $G = \{a, b, c\}$ wprowadzamy działanie $\circ$ określone poniższą tabelą:

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	a	a

Wykorzystując poprzednie zadanie wykaż, że działanie to nie jest łączne.

15. Udowodnij, że

- (a) zbiór $A = \{m + ni : m, n \in \mathbb{Z}\}$ z działaniem dodawania liczb zespolonych tworzy grupę;
- (b) zbiór $B = \{2^n 3^m : m, n \in \mathbb{Z}\}$ z działaniem mnożenia liczb tworzy grupę;
- (c) grupy A i B są izomorficzne.

16. Udowodnij, że

- (a) zbiór $A = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ z działaniami dodawania i mnożenia liczb jest pierścieniem;
- (b) odwzorowanie $f : A \ni a + b\sqrt{3} \longrightarrow a - b\sqrt{3} \in A$ jest automorfizmem pierścienia $(A, +, \cdot)$ w siebie.

17. Niech $A = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ będzie pierwiastkiem algebraicznym stopnia czwartego z jedności, tj. $\varepsilon_k^4 = 1$ dla $k = 0, 1, 2, 3$.

- (a) Wykaż, że zbiór A z działaniem mnożenia liczb zespolonych tworzy grupę. Sprawdź, czy jest to grupa cykliczna, a w przypadku pozytywnej odpowiedzi wskaż wszystkie jej generatory.
- (b) Wyznacz wszystkie homomorfizmy grupy $(\mathbb{Z}_4, +)$ w grupę $(A, \cdot)$. Czy któryś z tych homomorfizmów jest izomorfizmem?

18. Uzasadnij, że każda grupa cykliczna rzędu n jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{Z}_n, +)$.

19. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

- (a) Każda grupa, której rząd jest liczbą pierwszą jest grupą cykliczną.
- (b) Wszystkie grupy cykliczne tego samego rzędu $n \in \mathbb{N}$ są izomorficzne.
- (c) Grupa cykliczna rzędu $n \in \mathbb{N}$ jest izomorficzna z grupą cykliczną rzędu $m \in \mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m = n$.
- (d) Jeżeli A jest grupą cykliczną rzędu $n \in \mathbb{N}$, a $h : A \rightarrow B$ jest homomorfizmem grup, to grupa B również jest grupą cykliczną rzędu n .
- (e) Jeżeli A jest grupą cykliczną rzędu $n \in \mathbb{N}$, a $h : A \rightarrow B$ jest izomorfizmem grup, to grupa B również jest grupą cykliczną rzędu n .

20. Wykaż, że odwzorowanie h jest homomorfizmem grupy G_1 w grupę G_2 ; następnie sprawdź, czy jest ono izomorfizmem:

- (a) $h(z) = |z|$, $G_1 = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$;
- (b) $h(n) = n - 3$, $G_1 = (\mathbb{Z}, +)$, $G_2 = (\mathbb{Z}, \circ)$, gdzie $m \circ n = m + n + 3$;
- (c) $h(x) = \ln x$, $G_1 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{R}, +)$;
- (d) $h(z) = z^5$, $G_1 = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{C}^*, \cdot)$;
- (e) $h(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx$, $G_1 = (\mathcal{C}_{[0,1]}, +)$, $G_2 = (\mathbb{R}, +)$;
- (f) $h(A) = (\det A)^2$, $G_1 = (M_{n \times n}^*(\mathbb{R}), \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$, gdzie $M_{n \times n}^*(\mathbb{R})$ to zbiór nieosobliwych macierzy rzeczywistych wymiaru $n \times n$.

21.  Znajdź wszystkie homomorfizmy grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ w grupę $(\mathbb{Z}_6, +)$.

Zestaw 4. Przestrzenie wektorowe

1. Sprawdź, czy podana struktura jest przestrzenią wektorową:

(a) $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie $+$ to naturalne działanie dodawania w $\mathbb{R}^n$ oraz dla $\alpha \in \mathbb{R}$ i $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) := (\alpha x_1, x_2, \dots, x_n);$$

(b) $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie $+$ to naturalne działanie dodawania w $\mathbb{R}^n$ oraz dla $\alpha \in \mathbb{R}$ i $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) := (\alpha x_1, 0, \dots, 0);$$

(c) $(\mathcal{W}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie $\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}[x]_n : w(-1) + w(1) = 0\}$; działania to naturalne działania dodawania wielomianów oraz mnożenia wielomianu przez skalar;

(d) $(\mathcal{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) - 2\operatorname{Im}(z) = 0\}$; działania to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb zespolonych;

(e) $(\mathcal{C}, \mathbb{C}, +, \cdot)$, gdzie $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) - 2\operatorname{Im}(z) = 0\}$; działania to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb zespolonych

2. Niech $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ oznacza przestrzeń wektorową wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez skalar. Który ze zbiorów tworzy podprzestrzeń wektorową tej przestrzeni?

(a) $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ – funkcja parzysta}\}$;

(b) $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1) + f(2) = 0\}$;

(c) $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1)f(2) = 0\}$.

3. Zbadaj liniową niezależność wektorów:

(a) $v_1 = (1, 2, -1), v_2 = (0, -5, 1), v_3 = (3, 1, 0)$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$;

(b) $v_1 = (1, -2, 3), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (-1, -2, 1)$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$;

(c) $v_1(x) = x, v_2(x) = \sin x, v_3(x) = \cos x$ w przestrzeni $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$;

(d) $v_1(x) = e^x, v_2(x) = e^{2x}, v_3(x) = e^{2(x-1)}$ w przestrzeni $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$.

4. Wyznacz wymiary oraz przykładowe bazy przestrzeni wektorowych z zadania 1.

5. Wyznacz bazę przestrzeni wektorowej (wszystkie przestrzenie rozważamy nad ciałem liczb rzeczywistych z naturalnymi działaniami):

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$;

(b) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0, 2x - 3z + 2w = 0\}$;

(c) $\{w \in \mathbb{R}[x]_2 : w(1) - w'(2) = 0\}$.

(d) $\operatorname{lin}\{(1, 2, 1, 0), (-1, -2, 0, 1), (3, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$; podaj współrzędne wektorów $u = (5, 4, 2, 1)$ oraz $v = (3, 0, 1, -2)$ względem znalezionej bazy.

6. Dane są dwa układy wektorów:

$$B_1 = ((1, i, 1 + i), (i, -1, 2 - i), (0, 0, 3)) \quad \text{oraz} \quad B_2 = ((2i, 1, 0), (2, -i, 1), (0, 1 + i, 1 - i)).$$

Sprawdź, czy któryś z tych układów stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$ lub $\mathbb{C}^3(\mathbb{R})$. Znajdź współrzędne wektora $(1, 0, 1)$ w znalezionej bazie.

7. Sprawdź, czy zachodzi równość podprzestrzeni w $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$:

$$\text{lin}\{(1, 3, -5, 2), (2, -4, 1, -1)\} = \text{lin}\{(1, -7, 6, -3), (-5, -5, 14, -5)\}.$$

8. Dana jest podprzestrzeń wektorowa $\text{lin}\{(1, 2 + i, i, 0), (-1 - i, -2, 0, 1)\}$ w $\mathbb{C}^4(\mathbb{C})$. Jaki jest wymiar i przykładowa baza tej podprzestrzeni w $\mathbb{C}^4(\mathbb{R})$?

9. W przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$ dana jest baza $B_1 = (1, x, x^2)$.

(a) Wykaż, że układ $B_2 = (1, x - 2, (x - 2)^2)$ stanowi bazę w $\mathbb{R}[x]_2$.

(b) Podaj współrzędne wielomianu $p(x) = 2x^2 + 3$ względem baz B_1 oraz B_2 .

(c) Czy zbiór $A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(1) = p'(0)\}$ stanowi podprzestrzeń $\mathbb{R}[x]_2$? Jeżeli tak, wyznacz jej przykładową bazę i wymiar.

10. Niech $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}[x]_n$ będą dowolnymi wielomianami takimi, że $\deg f_k = k$ ($k = 0, \dots, n$), $f_0 \neq 0$. Uzasadnij, że wielomiany $f_0, f_1, \dots, f_n$ stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_n$.

11.  Dla dowolnych, ustalonych, parami różnych liczb $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ definiujemy wielomiany $\varphi_0, \dots, \varphi_n$,

$$\varphi_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \dots, n.$$

(a) Uzasadnij, że $\deg \varphi_k = n$, dla $k = 0, \dots, n$.

(b) Wykaż, że wielomiany $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ stanowią bazę przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]_n$.

(c) Wyznacz współrzędne wielomianu $v(x) = x^n$ w bazie $B = (\varphi_0, \dots, \varphi_n)$;

(d) dla zadanej funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wyznacz wielomian $\varphi \in \mathbb{R}[x]_n$ interpolujący funkcję f , tj. spełniający warunek $\varphi(x_i) = f(x_i)$ dla $i = 0, \dots, n$.

12. Znajdź współrzędne wektora v w bazie B :

(a) $v = (1, 2, 1); B = ((0, 1, 1), (-1, 2, 1), (-1, 0, 1))$;

(b) $v = (1, 2, 1); B = ((2, -1, -1), (-1, 4, -3), (-3, 2, 0))$;

(c) $v(x) = x^2 - 1; B = (1, x - 2, (x - 2)(x - 3))$;

(d) $v(x) = x^2; B = (x^2 - x, x^2 + x, x^2 - 1)$.

13. Wektory v_1, v_2, v_3 są bazą pewnej przestrzeni wektorowej. Który z poniższych zbiorów również jest jej bazą?

(a) $v_1 + 2v_2 + v_3, v_2 - v_3, v_1 + 3v_3$;

(b) $v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3, v_3$;

(c) $v_1 + v_2 + v_3, v_1 - v_2 + v_3, v_1 + v_2 - v_3$.

14. ☠ Zbiory $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{R}$ posiadają nieskończenie wiele elementów, jednak nie wszystkie te zbiory są równoliczne. Można pokazać, że

$$\aleph_0 = \#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q} < \#\mathbb{R} = \mathfrak{c};$$

symbol $\#$ oznacza liczbę elementów zbioru.

Rozważmy przestrzeń wektorową $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$; działania to naturalne działania dodawania oraz mnożenia liczb. Uzasadnij, że $\dim(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot) > \aleph_0$. Nieprzeliczalna baza przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$ to tzw. *baza Hamela*.

15. Wykaż liniową niezależność wektorów w przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$:

- (a) $v_1 = 1, v_2 = \sqrt{2}$;
- (b) $v_1 = \sqrt{2}, v_2 = \sqrt{3}, v_3 = \sqrt{6}$;
- (c) $v_1 = 1, v_2 = \sqrt{2}, v_3 = \pi$.¹

16. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

- (a) Z dowolnej bazy przestrzeni wektorowej można wybrać bazę dowolnej jej podprzestrzeni wektorowej.
- (b) Bazę dowolnej podprzestrzeni wektorowej można uzupełnić do bazy całej przestrzeni.
- (c) Z dowolnego zbioru wektorów generujących całą przestrzeń liniową można wybrać jej bazę.
- (d) Z każdego zbioru wektorów liniowo niezależnych przestrzeni wektorowej można wybrać jej bazę.
- (e) Każda rzeczywista przestrzeń wektorowa posiada nieskończenie wiele baz.

¹Liczbę rzeczywistą będącą miejscem zerowym wielomianu o współczynnikach całkowitych nazywamy *liczbą algebraiczną*. Dowolna liczba wymierna p/q , gdzie $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, jako miejsce zerowe wielomianu o współczynnikach całkowitych $x \rightarrow qx - p$, jest liczbą algebraiczną. Podobnie, liczba $\sqrt{2}$, jako miejsce zerowe wielomianu $x \rightarrow x^2 - 2$, jest liczbą algebraiczną. Można wykazać, że zbiór wszystkich liczb algebraicznych z naturalnymi działaniami dodawania oraz mnożenia liczb jest ciałem. Przykładami liczb niealgebraicznych (czyli *liczb przestępnych*) są π oraz e . Fakt ten może być przydatny w rozwiązaniu zadania 11(c).

Zestaw 5. Macierze

1. Sprawdź, czy:

- (a) struktura $(M_{n \times m}(\mathbb{R}), +)$ jest grupą abelową, $+$ to naturalne działanie dodawanie macierzy.
- (b) struktura $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), \cdot)$ jest grupą abelową, $\cdot$ to naturalne działanie mnożenia macierzy.
- (c) struktura $(M_{n \times m}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową, działania to naturalne działania dodawania macierzy oraz mnożenia macierzy przez skalar. W przypadku pozytywnej odpowiedzi, podaj wymiar tej przestrzeni.

2. Niech $B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ będzie ustaloną macierzą. Czy zbiór

- (a) $V_B = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A \cdot B = 0\}$,
- (b) $W_B = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A \cdot B = B \cdot A\}$

z naturalnymi działaniami dodawania macierzy oraz mnożenia macierzy przez skalar jest rzeczywistą przestrzenią liniową? Jeżeli tak, wyznacz jej bazę przyjmując

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierz X spełniającą równanie

- (a) $4(A - X) + 5(3X + B) = A - B + 8X$;
- (b) $B^T X = [1 \ 1 \ 0]^T$.

4. Wyznacz $f(A)$, jeżeli $f(x) = x^2 - 5x + 3$ oraz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$. Następnie, wykorzystując otrzymaną zależność, znajdź macierz B , dla której $A \cdot B = B \cdot A = I$.

5. 🧠 Uzasadnij, że dla dowolnej macierzy $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ istnieje wielomian rzeczywisty f , taki że $f(A) = 0$.

6. Rozwiąż macierzowy układ równań

$$\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

7. Sprawdź czy zbiór

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

z działaniem mnożenia macierzy jest grupą abelową.

8. Oblicz wyznaczniki podanych macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

9. Uzasadnij, że wyznacznik macierzy $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ($n > 1$) o wyrazach nieparzystych jest liczbą parzystą.

10. Znajdź możliwe wartości wyznacznika macierzy $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ spełniającej równanie:

$$(a) A^2 = A^T; \quad (b) A^T - A^{-1} = 0; \quad (c) A^2 + A^{-1} = 0; \quad (d) A^3 - 16A^{-1} = 0;$$

rozważ dwa przypadki: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

11. Niech A będzie macierzą kwadratową o elementach rzeczywistych. Oblicz $\det(2A)$ wiedząc, że $\det(3A) = 54$ oraz $\det(4A) = 128$.

12. Liczby 1798, 2139, 3255, 4867 dzielą się przez 31. Uzasadnij, że wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

również dzieli się przez 31.

13. Nie obliczając wyznaczników znajdź rozwiązania podanych równań:

$$(a) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6-x & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & x \end{vmatrix} = 0, \quad (b) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 & 3 \\ -1 & 1-x^2 & -9 & -3 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & x^2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

14. Wyznacz macierze odwrotne dla macierzy nieosobliwych z zadania 8.

15. W zbiorze $G = \{X \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det(X - I_n) \neq 0\}$ wprowadzamy działanie

$$h : G \times G \ni (A, B) \rightarrow A + B - AB \in M_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

(a) Uzasadnij, że działanie h jest wewnętrzne w zbiorze G .

(b) Sprawdź, czy para (G, h) jest grupą.

(c) Wykaż, że dla dowolnej macierzy $A \in G$ jedynym rozwiązaniem równania

$$h(X, A) = 2I_n$$

jest $X = I_n - (A - I_n)^{-1}$. Czy rozwiązanie to należy do zbioru G ?

16. Niech A będzie macierzą kwadratową. Wykaż, że jeśli $A^k = 0$ dla pewnego $k \geq 1$, to

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}.$$

17. Rozwiąż równanie $AX = B^T$, w którym

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1+2i & 0 \\ 1-2i & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2i-1 & 0 & 2i \\ 0 & 3i & 0 & 2i+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

18. Wyznacz rząd macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & -1 & 6 \\ -3 & 3 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

19. Wyznacz rzędy (metodą minorów) następujących macierzy w zależności od parametru rzeczywistego p :

$$A = \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} p-1 & p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & p-1 & 1 \end{bmatrix}.$$

20. Obliczając wyznacznik odpowiedniej macierzy sprawdź, czy wektory $u = (2+i, i, 2)$, $v = (1-2i, 1, -2i)$, $w = (0, i, 0)$ są liniowo niezależne w $(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}, +, \cdot)$.

21. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1-a & 1 \\ a & 0 & -a \\ -1 & a+a^2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}$$

jest: (a) największy; (b) najmniejszy?

22. Sprawdź, dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & p & p & p \\ p & 1 & p & p \\ p & p & 1 & p \\ p & p & p & 1 \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa.

23. Wyznacz wymiar rzeczywistej przestrzeni wektorowej

$$\text{lin}\{(1, p, p, p), (p, 1, p, p), (p, p, 1, p), (p, p, p, 1)\}$$

w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$.

Zestaw 6. Układy równań liniowych

1. Metodą Gaussa rozwiąż układy równań:

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases} ; \quad (b) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -2 \end{cases} ;$$

$$(c) \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases} ; \quad (d) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_6 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 - 2x_6 = 3 \\ -4x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 - 2x_6 = -3 \end{cases} ; \quad (f) \begin{cases} 2x + y = -3 \\ 3x + 4y = 1 \\ 5x - y = 6 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} -3x + 6y - 3z = 2 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases} ; \quad (h) \begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ 7x - 4y + z + 3t = 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6t = 3 \end{cases} .$$

2. Znajdź bazę podprzestrzeni wektorowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 7y - 2z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \end{cases} .$$

3. Określ liczbę rozwiązań układu w zależności od wartości parametru $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases} ;$$

w przypadku, gdy układ jest oznaczony znajdź jego rozwiązanie stosując: (a) wzory Cramera, (b) metodę macierzy odwrotnej.

4. Określ liczbę rozwiązań układu w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$; wyznacz rozwiązania dla tych wartości parametru, dla których układ jest nieoznaczony:

$$(a) \begin{cases} (5-p)x - 2y - z = 1 \\ -2x + (2-p)y - 2z = 2 \\ -x - 2y + (5-p)z = 1 \end{cases} ; \quad (b) \begin{cases} px + y = 2 \\ 2x - y = p \\ 2x - y = 1 \end{cases} ; \quad (c) \begin{cases} x + y + pz = 2 \\ x + py + z = -1 \\ px + y + z = -1 \end{cases} .$$

5. Wyznacz te wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, dla których w przestrzeni wektorowej $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$ zachodzi

$$(3, p-4, p-5, p-6) \in \text{lin}\{(-p, 1, p, p), (-p, p, 2, p), (-p, p, p, 3)\}.$$

6. Znajdź dowolną bazę podprzestrzeni wektorowej przestrzeni $(\mathbb{C}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}.$$

W wybranej bazie podaj współrzędne tych z poniższych wektorów, które należą do tej podprzestrzeni:

$$u = (-2i, i, -2i), \quad v = (-2i, 4i, -2i), \quad w = (2-i, -4+2i, 2-i).$$

7. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + (1-a)y - iz = 0 \\ (1-i)x + (3+i)y - (1+i)z = 0 \\ ax + y - 2z = 0 \end{cases}$$

dla wartości parametru $a \in \mathbb{C}$ będących pierwiastkami wielomianu

$$\varphi(a) = (1+i)a^2 - (4-4i)a - 4 - 4i.$$

Wyznacz te rozwiązania.

8. Rozważmy następujący problem interpolacyjny: szukamy wielomianu $p \in \mathbb{R}[x]_3$ spełniającego warunki

$$p(-2) = 3, \quad p(-1) = 2, \quad p(1) = 6.$$

Zapisz te warunki w postaci układu równań liniowych ze względu na nieznanne współczynniki wielomianu p . Stosując metodę sprowadzania macierzy uzupełnionej układu do postaci schodkowej zbadaj ile rozwiązań ma ten układ; jeżeli nie jest układem sprzecznym wyznacz jego rozwiązania. Sprawdź, czy wyznaczony wielomian istotnie spełnia požądane warunki.

9. Punkt $x_0 \in X$ nazywam punktem stałym odwzorowania $f : X \rightarrow X$ jeżeli $f(x_0) = x_0$. Zbadaj liczbę punktów stałych odwzorowania

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (2x + (a-1)y + 2z + 1, x - y, 2x + 2y + (a+1)z - 2) \in \mathbb{R}^3$$

w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Zestaw 7. Przekształcenia liniowe

1. Sprawdź, które z podanych odwzorowań jest liniowe:

- (a) $\mathcal{L}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}(x, y, z) = (x - 1, y + z)$;
- (b) $\mathcal{L}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\mathcal{L}(x, y, z) = (x + y, 2x - z, 3x + y, 0)$;
- (c) $\mathcal{L}: M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(A) = A + A^T$;
- (d) $\mathcal{L}: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$, $(\mathcal{L}p)(x) = xp''(x) + p(0)$;
- (e) $\mathcal{L}: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, $(\mathcal{L}p)(x) = p(x)p'(x)$.

2. Dla odwzorowań liniowych z poprzedniego zadania wyznacz bazę jądra $\ker \mathcal{L}$ i bazę obrazu $\text{im } \mathcal{L}$ oraz określ, które z nich jest monomorfizmem, epimorfizmem, izomorfizmem.

3. Odwzorowanie liniowe $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określone jest przez warunki

$$f(1, 1, 1) = (1, 4), \quad f(1, -1, 1) = (-1, 2), \quad f(1, 1, 0) = (2, 2).$$

- (a) Znajdź $\ker f$ oraz $\text{im } f$.
- (b) Podaj rząd odwzorowania f .
- (c) Zbadaj, czy odwzorowanie f jest monomorfizmem.

4. Niech $f: U \rightarrow V$ będzie odwzorowaniem liniowym oraz niech (u_1, u_2, u_3) i (v_1, v_2) będą bazami rzeczywistych przestrzeni wektorowych U i V . Wiedząc że

$$f(u_1) = 2v_1, \quad f(u_2) = -v_2, \quad f(u_1 + u_3) = v_1 + v_2, \quad f(u_1 - u_3) = 3v_1 - v_2,$$

wyznacz $\ker f$.

5. Wyznacz macierze odwzorowań liniowych z zadania 1. w dowolnie wybranych bazach.

6. Niech $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem liniowym postaci

$$f(x, y, z, t) = (3x - 2y + z + at, 5x - 8y + 9z + 3t, 2x + y + az - t).$$

Wyznacz macierz tego odwzorowania w bazach kanonicznych i na jej podstawie określ dla jakich wartości parametru a odwzorowanie f jest: (a) monomorfizmem, (b) epimorfizmem.

7. Rozważmy odwzorowanie liniowe $L: \mathbb{R}[x]_4 \rightarrow \mathbb{R}[x]_4$,

$$(Lw)(x) = xw'(x) + pw(-x).$$

Wyznacz jego macierz w bazach kanonicznych i na jej podstawie określ, dla jakich wartości parametru p odwzorowanie L jest: (a) monomorfizmem, (b) epimorfizmem.

8. Dane są następujące odwzorowania liniowe: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z)$ oraz $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g(x, y) = (y, x, x + y)$.

- (a) Znajdź $\ker f$, $\ker g$, $\text{im } f$, $\text{im } g$, ich bazy i wymiary.

- (b) Podaj macierz złożenia $g \circ f$ w bazie kanonicznej (wykorzystaj macierze odwzorowań f i g) i odczytaj z tej macierzy przepis tego odwzorowania.
9. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ i niech $B = (e_1, e_2, e_3)$ będzie jej bazą. Udowodnij, że $B' = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ też jest bazą w V . Wyznacz macierz przejścia $P = P_{B \rightarrow B'}$ oraz współrzędne wektora $e_1 - 2e_2 + 3e_3$ w bazie B' .
10. Dane jest odwzorowanie liniowe $f: \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (2y, x + z) \in \mathbb{R}^2$. Znajdź macierz $M_f(B_1, B_2)$ tego przekształcenia w bazach B_1, B_2 :
- (a) $B_1 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, $B_2 = ((1, 0), (0, 1))$;
 (b) $B_1 = ((2, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1))$, $B_2 = ((1, 1), (0, -1))$.

Jaka zależność łączy macierze uzyskane w powyższych podpunktach?

11. Rozważmy odwzorowanie liniowe $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o macierzy $M_g(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Znajdź wartość $g(1, 2, 0)$, jeżeli w przestrzeniach $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ zadano bazy takie jak w zadaniu poprzednim.
12. Niech $X = \text{lin}\{e^x, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$. Wyznacz macierz endomorfizmu $L: X \rightarrow X$ (w dowolnej bazie przestrzeni X), gdzie
- (a) $L(f) = f'$;
 (b) $L(f) = f + f''$.

Podaj wymiary obrazu i jądra tego odwzorowania (wykorzystując rząd wyznaczonej macierzy odwzorowania) oraz wyznacz ich bazy. Korzystając z macierzowej reprezentacji odwzorowania L wyznacz wartość $L(f)$, gdzie $f(x) = 3 \sin x(1 - 4 \cos x)$.

13. Rozważmy bazę $B = (v_1, v_2, v_3)$ przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ oraz endomorfizm f , taki że $f(v_1) = v_2 - v_3$, $f(v_2) = v_1 - v_2$, $f(v_3) = v_3 - v_1$.
- (a) Wyznacz macierz $M_f(B)$ i na jej podstawie sprawdź, czy f jest izomorfizmem.
 (b) Wyznacz bazę B jeżeli wiadomo, że macierz przejścia z bazy kanonicznej B_k do bazy B ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (c) Wyznacz wartość $f(0, 1, 2)$ dwoma sposobami: korzystając z macierzy $M_f(B)$ oraz z macierzy $M_f(B_k)$.
14. Znajdź macierz $M_L(B_1, B_2)$ odwzorowania liniowego $L: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$ postaci $(Lw)(x) = xw(-x)$, gdzie $B_1 = (x^2 + x, x - 1, x + 2)$, $B_2 = (x^3 + x, x^3 - x, x^2 + 1, x^2 - 1)$. Ponadto
- (a) wyznacz wymiar przestrzeni $\ker L$ badając rząd macierzy $M_L(B_1, B_2)$,
 (b) wyznacz macierz odwzorowania liniowego L w bazach kanonicznych.

15. Rozważmy rzeczywiste przestrzenie wektorowe U, V, W oraz odwzorowania liniowe $f: U \rightarrow V$ i $g: V \rightarrow U$. Niech

$$M_f(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_g(B_3, B_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierz $M_{f \circ g}(B_2, B_2)$ jeśli wiadomo, że $B_1 = (u_1, u_2)$, $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$, $B_3 = (w_1, w_2, w_3)$, gdzie $w_1 = 2v_2 + v_3$, $w_2 = -v_1$, $w_3 = -v_2 - v_3$.

16.  Wyznacz bazę B przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz endomorfizmu $L : (x, y, z) \rightarrow (x - y, y + z, -z)$ ma postać

$$M_L(B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

17. Rozważmy endomorfizm $\Phi_n : \mathbb{R}[x]_n \ni f \rightarrow f' \in \mathbb{R}[x]_n$.

- (a) Wyznacz $\ker \Phi_n$, $\text{im } \Phi_n$ oraz bazy tych przestrzeni.
 (b) Wyznacz macierz $M_{\Phi_n}(B)$ odwzorowania Φ_n w bazie $B = (b_0, \dots, b_n)$, gdzie

$$b_0(x) = 1, \quad b_1(x) = 1 + x, \quad b_2(x) = 1 + x + x^2, \quad \dots, \quad b_n(x) = 1 + x + \dots + x^n.$$

- (c) Rozważmy bazę $C = (c_0, \dots, c_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}_n[x]$, gdzie $c_k(x) = x^k$ ($k = 0, \dots, n$). Wyznacz macierz przejścia P z bazy B do bazy C oraz macierz P^{-1} .
 (d) Wykorzystując macierzową reprezentację endomorfizmu Φ_3 oblicz $(1 + x^2 + 6x^3)'$.

18. Rozważmy endomorfizm $F : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ postaci

$$F : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2a - b + 2c - d & b + 2c - d \\ 2c & b - 2c + 3d \end{bmatrix}.$$

- (a) Wyznacz jądro oraz obraz endomorfizmu F ; wyznacz bazy tych przestrzeni.
 (b) W wybranej bazie B przestrzeni $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ wyznacz macierz $M_F(B)$ endomorfizmu F .
 (c) Sprawdź, czy F jest izomorfizmem; w przypadku odpowiedzi pozytywnej wyznacz odwzorowanie odwrotne F^{-1} .

Zestaw 8. Wartości i wektory własne, diagonalizowalność

1. Wyznacz wartości i wektory własne macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} -i & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -i \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (d) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Wyznacz wartości własne oraz odpowiadające im podprzestrzenie własne poniższych endomorfizmów. Czy te endomorfizmy są diagonalizowalne?

- (a) $f: \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (x - y + z, x - y - z, 2x - 2y) \in \mathbb{R}^3$;
 (b) $f: \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (2x + y + z, 2y + z, 2z) \in \mathbb{R}^3$;
 (c) $f: \mathbb{R}[x]_2 \ni ax^2 + bx + c \rightarrow (5a + 9c)x^2 - (3a + 4b + 3c)x + 3a - c \in \mathbb{R}[x]_2$;
 (d) $f: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3a + c - d & 2a + 2b - 2d \\ 2c & a + d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

3. Przypuśćmy, że macierz z zadania 1(d) jest macierzą endomorfizmu $f: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$ w bazie $(1, x, x^2)$. Wyznacz wartości własne endomorfizmu f oraz odpowiadające im podprzestrzenie własne; wskaż bazę B złożoną z jego wektorów własnych oraz wyznacz macierz $M_f(B)$.

4. Rozważmy endomorfizm $f: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$ określony przez warunki:

$$f(x) = -x, \quad f(x^2 + 1) = 2x^2 + 2, \quad f(2x + 1) = 0.$$

Wyznacz jego wartości własne oraz bazę przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$, w której macierz endomorfizmu f jest diagonalna. Wykorzystując tę macierz wyznacz wielomian $f^k(1 + x + x^2)$ dla $k \in \mathbb{N}$; f^k oznacza k -krotne złożenie endomorfizmu f .

5. Sprawdź, czy macierz jest diagonalizowalna; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz macierze diagonalną D oraz nieosobliwą P , takie że $A = PDP^{-1}$.

$$(a) A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 8 \end{bmatrix}, \quad (b) A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (c) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wykorzystując otrzymany rozkład macierzy A wyznacz macierz A^{100} .

6. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Znajdź te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których macierz A jest diagonalizowalna. Dla wyznaczonych wartości a znajdź taką macierz nieosobliwą P , dla której macierz $P^{-1}AP$ jest diagonalna.

7. Niech

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Wyznacz te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których wektor v jest wektorem własnym macierzy A . Czy otrzymana macierz jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij.

8. Rozważmy endomorfizm $f : \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$ określony przez warunki:

$$f(x^3) = -x^3, \quad f(x^2) = x^3 - 1, \quad f(x) = -x, \quad f(1) = 2x^3 + 2x^2 - 3.$$

Wykaż, że endomorfizm f jest diagonalizowalny. Następnie wyznacz bazę B przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$, w której macierz $M_f(B)$ jest diagonalna. Wypisz tę macierz i korzystając z niej znajdź $f^{10}(x^3 + x)$.

9. Rozważmy przestrzeń wektorową U o bazie $B = (\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x)$ oraz endomorfizm $L : U \rightarrow U$ spełniający warunki: $L(\sin x - \cos x) = \cos x - \sin x$, $L(\sin x + \cos x) = \cos x + \sin x$, $L(\sin 2x - \cos 2x) = \cos 2x - \sin 2x$, $L(\cos 2x) = \cos 2x$. Oblicz $L^{1000}(\sin x \cos x)$ oraz $L^{-1}(\sin^2 x - \cos^2 x)$.