
Zestaw 1. Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych

1. Przedstaw graficznie dziedziny (naturalne) podanych funkcji:

$$(a) f(x, y) = \frac{1}{(x-2)(y+1)}, \quad (b) f(x, y) = \log_{x^2+y^2} (4 - x^2 - y^2), \quad (c) f(x, y) = \sqrt{\ln \cos(x-y)}.$$

2. Jakie powierzchnie w układzie O_{xyz} opisane są poniższymi zależnościami?

$$(a) y = x^2 - 2x + 3, \quad (b) x^2 + y^2 = 1, \quad (c) 2x + y - z + 1 = 0, \quad (d) z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$(e) z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, \quad (f) z = 4x^2 + y^2, \quad (h) z = 1 - 3x^2 - 3y^2, \quad (i) x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

3. Dla podanych funkcji wyznacz granice iterowane w punkcie $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$(a) f(x, y) = \frac{|x| - |y| + x^2 + y^2}{|x| + |y|}, \quad (b) f(x, y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x + y}, \quad (c) f(x, y) = x \operatorname{tg} \frac{1}{y},$$

$$(d) f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin^2 \frac{1}{x}, \quad (e) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (f) f(x, y) = \frac{\sin(|x| + |y|)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Co na podstawie wyznaczonych granic iterowanych możemy powiedzieć o granicy podwójnej?

4. Wyznacz (lub uzasadnij, że nie istnieją) poniższe granice:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{xy^2} \quad (e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{|x| + |y|} \quad (f) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (x^y + y)^{1/y}$$

$$(h) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2} \quad (i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x|^y \quad (j) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2 - 1}{(y - 2)^2}$$

$$(k) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} \frac{\sin(x \sin y)}{xy} \quad (l) \lim_{(x,y) \rightarrow (1, \frac{\pi}{2})} \frac{\cos xy}{(y - \frac{\pi}{2})^2} \quad (m) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

5. Zbadaj ciągłość podanych funkcji:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|y + x|y|}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{e^{x^2 + y^2} - 1} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin|x+y|}{|x|+|y|} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (f) \text{☠} f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^4 + y^2} & \text{dla } x > 0 \\ x \cos x + y & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

6. ☠ Wyznacz, o ile istnieją, te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których podane funkcje są ciągłe:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+ay)(x+by)}{x^2 - y^2} & \text{dla } |x| \neq |y| \\ x^2 & \text{dla } |x| = |y| \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - 1 & \text{dla } x^2 + y^2 \geq 1 \\ ax + by & \text{dla } x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

Zestaw 2. Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

1. Wyznacz pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach oraz kierunkach:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (1, -1)$, $\vec{v} = (-3, -4)$;

(b) $f(x, y) = x \ln y + y \ln x$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0)$;

(c) $f(x, y) = |x - y|$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $\vec{v} = (3, 4)$;

(d) $f(x, y) = 2|x| + |y|$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\vec{v} = (1, 1)$.

2. Przypuśćmy, że funkcja f posiada pochodną kierunkową $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p_0)$ w punkcie p_0 w kierunku wektora $\vec{v} \neq 0$. Uzasadnij, że

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_0 + t\vec{v}) - f(p_0)}{t\|\vec{v}\|} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p_0).$$

Wykorzystując wykazaną zależność wyznacz ponownie pochodną kierunkową wybranej funkcji z poprzedniego zadania.

3. Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ma ciągle wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w otoczeniu pewnego punktu $p_0 \in \mathbb{R}^n$, to dla dowolnego wektora $\vec{v}$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p_0) = \vec{v} \circ \text{grad } f(p_0),$$

gdzie $\text{grad } f(p_0) = (f'_{x_1}(p_0), \dots, f'_{x_n}(p_0))$ to gradient funkcji f w punkcie p_0 , a $\circ$ to naturalny iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Wykorzystując powyższy fakt, wyznacz ponownie pochodne kierunkowe z zadania 1.

4. Wyznacz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f :

(a) $f(x, y) = \frac{\sin x + \cos y}{\sin x - \cos y} + x^{y^2+2y}$,

(b) $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$,

(c) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$,

(d) $f(x, y) = xy \operatorname{sgn}(xy)$,

(e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, (f) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } xy = 0 \\ 1 & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases}$.

5. (a) Niech $g(x, y) = f(xy, x^2 + y^2)$, gdzie funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Wyznacz

$$y \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

- (b) Wykaż, że funkcja $g(x, y) = y + f(x^2 + y^2)$ spełnia równanie

$$x \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = x;$$

funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ to dowolna funkcja różniczkowalna.

6. Wyznacz macierze Jacobiego oraz różniczki zupełne podanych funkcji we wskazanych punktach:

- (a) $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 1$;
 (b) $f(x, y) = x^2y + y^2x$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$;
 (c) $f(x) = (x, x^2 + x, 2x - 1)$, $x_0 = 1$;
 (d) $f(x, y, z) = (xy + yz, x^2 + y^2)$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, 1)$.

7. Zbadaj różniczkowalność podanych funkcji:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{(b)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \text{(c)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{(d)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

8. Sprawdź, czy poniższe funkcje spełniają warunek $f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0)$:

$$\text{(a)} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{(b)} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

9. Wyznacz równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x, y) = \arctg(y/x)$ w punkcie $(1, 1)$.

Zestaw 3. Ekstrema lokalne, warunkowe, globalne

1. Wyznacz ekstrema lokalne podanych funkcji:

- (a) $f(x, y) = 3(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2$;
- (b) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$;
- (c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
- (d) $f(x, y) = x^3 - y^3 + 1$;
- (e) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$;
- (f) $f(x, y, z) = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$;
- (g) $f(x, y, z) = 2x^2/y + y^2/z - 4x + 2z^2$;
- (h) $f(x, y, z) = x + y + z + 16/xyz$.

2. Wyznacz ekstrema warunkowe podanych funkcji przy zadanych warunkach:

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 2$, $2x^2 + y^2 = 4$;
- (b) $f(x, y) = x + y$, $e^{x+y} - xy - 1 = 0$;
- (c) $f(x, y) = y - \ln x$, $x^2 + (y - 2)^2 - 2 = 0$;
- (d) $f(x, y) = x + 2y$, $x^2 + y^2 = 5$;
- (e) $f(x, y, z) = x + y + 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
- (f) $f(x, y, z) = xyz$, $x + y + z = 1$;
- (g) $f(x, y, z) = x + y + z$, $xyz = 1$;
- (h) $f(x_1, \dots, x_n) = 2 \ln |x_1 \cdot \dots \cdot x_n|$, $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$;
- (i) $f(x_1, \dots, x_n) = 2(x_1^4 + \dots + x_n^4)$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$.

3. Wyznacz największą oraz najmniejszą wartość funkcji f w podanym obszarze:

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $|x| + |y| \leq 2$;
- (b) $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ w trójkącie ograniczonym osiami O_x , O_y oraz prostą $x + y = 2\pi$;
- (c) $f(x, y) = xy$, $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$;
- (d) $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2$ w trójkącie domkniętym o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$;
- (e) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$;
- (f) $f(x, y, z) = x - 2y + 3z$, $0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$.

4. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi : \mathbb{R}^2 \ni x \rightarrow x^T A x \in \mathbb{R}.$$

Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji φ w zbiorze $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Porównaj otrzymane wyniki z wartościami własnymi macierzy A .

5. Spośród wszystkich trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu r wybierz ten o największym polu.

6. Oblicz odległość punktu $A = (0, 1, 0)$ od powierzchni o równaniu $y = xz$.

7. Oblicz odległość początku układu współrzędnych od:

(a) płaszczyzny $\pi : x - 2y + 3z - 6 = 0$; (b) powierzchni $\gamma : z = \sqrt{(x+2)(y-1)}$.

8. Wyznacz te wartości parametrów $a \in [-3, 3]$, $b \in [-1, 1]$ dla których wykres funkcji

$$f : [-1, 1] \ni x \rightarrow 5x^3 - ax - b \in \mathbb{R}$$

obrócony wokół osi O_x ogranicza bryłę o najmniejszej objętości.

Zestaw 4. Ciągi i szeregi funkcyjne

1. Zbadaj zbieżność punktową oraz jednostajną ciągów funkcyjnych $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f_n(x) &= \frac{1}{1+nx}, \quad x \geq 0; & \text{(b)} \quad f_n(x) &= \frac{nx}{1+n^\alpha x^2}, \quad x \in [0, 1], \quad \alpha \in \{2, 4\}; \\
 \text{(c)} \quad f_n(x) &= \frac{2}{1+x^n}, \quad x \geq 0; & \text{(d)} \quad f_n(x) &= \frac{n^x - n^{-x}}{n^{-x} + n^x}, \quad x \in \mathbb{R}; \\
 \text{(e)} \quad f_n(x) &= x^2 + \frac{1}{x+n}, \quad x \geq 0; & \text{(f)} \quad f_n(x) &= n^2 x e^{-n^2 x^2}, \quad x \in [0, 1]; \\
 \text{(g)} \quad f_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad x \in [0, 1]; & \text{(h)} \quad f_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad x \in [0, +\infty).
 \end{aligned}$$

2. Zbadaj zbieżność punktową, bezwzględną oraz jednostajną¹ podanych szeregów funkcyjnych:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx}{1+k^6 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}; & \quad \text{(b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{x}{k}, \quad x \in [-1, 1]; \\
 \text{(c)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} x^k, \quad x \in (-1, 1); & \quad \text{(d)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k \ln^k x}{k!}, \quad x \in (0, 1]; \\
 \text{(e)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^2 + k}, \quad x \in \mathbb{R}; & \quad \text{(f)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}, \quad x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

3. Wyznacz zbiory zbieżności podanych szeregów funkcyjnych:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-3x)^n}{3^n + 2^n}, & \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} (x+1)^n, & \text{(c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} (x+2)^n, & \text{(d)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n \ln^2 n}, \\
 \text{(e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}, & \quad \text{(f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-3)^n}{n}, & \text{(g)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} x^{2n}}{n 4^n}, & \text{(h)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x|x|+3)^n}{2^n \sqrt{n}}.
 \end{aligned}$$

4. Wyznacz promień i zbiór zbieżności danego szeregu oraz oblicz jego sumę w każdym punkcie wyznaczonego zbioru:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x-2)^n, & \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)4^n}, & \text{(c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{5^n} x^{2n}, & \text{(d)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^{3n}}{n+1}, \\
 \text{(e)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(x+1)^n}{6^n}, & \quad \text{(f)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n (n+1)(n+2)}, & \text{(g)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n.
 \end{aligned}$$

¹W zadaniach oznaczonych symbolem  pojawiają się pewne trudności jedynie przy badaniu zbieżności jednostajnej.

5. Uzasadnij poniższe równości:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, dla $|x| < 1$; następnie wyznacz wartość sumy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$;
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, dla $|x| < 1$;
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctg x$, dla $|x| < 1$; następnie wyznacz wartość sumy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

6. Oblicz sumy podanych szeregów liczbowych:

- t (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$; (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1}$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{5^n(n+1)}$; (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{4^n}$;
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n}$; (f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$; (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)2^n}$; (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)e^n}$.

7. Funkcję f przedstaw jako sumę szeregu potęgowego o środku w punkcie x_0 , oblicz promień zbieżności otrzymanego szeregu oraz wyznacz wartość $f^{(100)}(x_0)$:

- (a) $f(x) = \frac{1}{2+3x}$, $x_0 = 0$; (b) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x-3}$, $x_0 = -1$;
(c) $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = 0$; (d) $f(x) = e^x$, $x_0 = 2$;
(e) $f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x}$, $x_0 = -1$; (f) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi/2$;
(g) $f(x) = \ln(x^2+2x+3)$, $x_0 = -1$; (h) $f(x) = \ln(x^2+3x+2)$, $x_0 = 0$.

Zestaw 5. Szeregi Fouriera

1. Wyznacz szeregi Fouriera podanych funkcji i narysuj wykresy sum szeregów dla:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a) } f(x) = x + 1, & x \in [-2, 2]; \\
 \text{(b) } f(x) = |x| + 1, & x \in [-2, 2]; \\
 \text{(c) } f(x) = x^2, & x \in [-\pi, \pi]; \\
 \text{(d) } f(x) = |\sin x|, & x \in [-\pi, \pi]; \\
 \text{(e) } f(x) = |x + 2|, & x \in [-3, 1]; \\
 \text{(f) } f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{dla } -1 \leq x < 0 \end{cases} .
 \end{array}$$

Wskaż punkty, w których szeregi te są zbieżne do funkcji f .

2. Dla funkcji $f(x) = \operatorname{sgn}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ określonej na przedziale $[-\pi, \pi]$ znajdź jej szereg Fouriera; do jakiej funkcji ten szereg jest zbieżny punktowo?

3. Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$, a następnie oblicz sumę szeregu liczbowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

4. Podane funkcje rozwiń w szereg sinusów:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a) } f(x) = 1 - |x - 1|, & x \in [0, 2]; \\
 \text{(b) } f(x) = e^x - 1, & x \in (0, \pi); \\
 \text{(c) } f(x) = \cos x, & x \in (0, \pi); \\
 \text{(d) } f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{dla } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} .
 \end{array}$$

5. Podane funkcje rozwiń w szereg cosinusów:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a) } f(x) = 1 - |x - 1|, & x \in [0, 2]; \\
 \text{(b) } f(x) = \cos^2 x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}); \\
 \text{(c) } f(x) = \sin x, & x \in (0, \pi); \\
 \text{(d) } f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{dla } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} .
 \end{array}$$

6. Rozwiń w szereg sinusów funkcję $f(x) = x(\pi - x)$ dla $x \in \langle 0, \pi \rangle$ oraz naszkicuj wykres sumy tego szeregu. Następnie korzystając z tego rozwinięcia znajdź sumę szeregu liczbowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

7. Rozwiń w szereg cosinusów funkcję $f(x) = \pi^2 - x^2$ dla $x \in (0, \pi)$ oraz naszkicuj wykres sumy tego szeregu. Następnie korzystając z tego rozwinięcia znajdź sumę szeregu liczbowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

8. Wykaż, że dla $x \in (0, \pi)$ zachodzi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2).$$

9. Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ dla $x \in (0, 2\pi)$.

Zestaw 6. Ciała Galois

1. Wykaż, że zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ z działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem.
2. Czy zbiór $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ z działaniami dodawania i mnożenia jest pierścieniem całkowitym? A czy jest ciałem?
3. Czy zbiór $\{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$ z działaniami dodawania i mnożenia jest podpierścieniem w $\mathbb{C}$?
4. Znajdź wszystkie dzielniki zera w pierścieniu $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
5. Znajdź wszystkie ideały w następujących pierścieniach: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Q}$.
6. Podziel z resztą wielomian $x^7 + x^6 + x^4 + x + 1$ przez $x^3 + x + 1$ w $\mathbb{Z}_2[x]$.
7. Podziel z resztą wielomian $2x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 2$ przez $x^3 + 2x + 2$ w $\mathbb{Z}_3[x]$.
8. Znajdź największy wspólny dzielnik wielomianów $a(x) = x^4 + x^3 + 3x - 9$ oraz $b(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 3$ w $\mathbb{Q}[x]$.
9. Znajdź największy wspólny dzielnik wielomianów $a(x) = x^4 + x + 1$ oraz $b(x) = x^3 + x^2 + x$ w $\mathbb{Z}_3[x]$, a następnie przedstaw NWD($a(x), b(x)$) w postaci tożsamości Bézouta, czyli jako wyrażenie $a(x)p(x) + b(x)q(x)$ - podaj wielomiany $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$.
10. Znajdź największy wspólny dzielnik wielomianów $a(x) = x^4 + 2$ oraz $b(x) = x^3 + 3$ w $\mathbb{Z}_5[x]$, a następnie przedstaw NWD($a(x), b(x)$) w postaci tożsamości Bézouta, czyli jako wyrażenie $a(x)p(x) + b(x)q(x)$ - podaj wielomiany $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$.
11. Rozłóż wielomiany na czynniki nierozkładalne we wskazanym pierścieniu:
 - (a) $x^4 + 1$ w $\mathbb{Z}_5[x]$;
 - (b) $x^5 + 1$ w $\mathbb{Z}_2[x]$.
12. Znajdź nierozkładalny wielomian stopnia 2 nad $\mathbb{Z}_5$.
13. Znajdź nierozkładalny wielomian stopnia 3 nad $\mathbb{Z}_7$.
14. Czy wielomian $4x^3 + 3x^2 + x + 1$ jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbb{Z}_5[x]$?
15. Które z następujących pierścieni są ciałami: $\mathbb{Z}_6/(3)$?, $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + 1)$?, $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 2x + 2)$?
16. Oblicz sumę i iloczyn danych elementów we wskazanym pierścieniu:
 - (a) $3x + 4$ oraz $5x - 2$ w $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 7)$;

(b) $x^2 + 1$ oraz $x + 1$ w $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$.

17. Wykaż, że $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + 2x + 1)$ jest 27-elementowym ciałem i znajdź w nim odwrotność elementu x^2 stosując algorytm Euklidesa.
18. Skonstruuj ciało $GF(9)$ i oblicz w nim sumę oraz iloczyn wybranych dwóch wielomianów stopnia 1.
19. Skonstruuj ciało $GF(8)$ i oblicz w nim sumę oraz iloczyn wybranych dwóch wielomianów stopnia 2.
20. Podaj rząd i charakterystykę ciała $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + x + 2)$, a także stopień rozszerzenia $[\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + x + 2) : \mathbb{Z}_3]$.
21. Jaka jest charakterystyka ciała $GF(32)$?
Mamy $GF(32) \cong \mathbb{Z}_2(\alpha)$, gdzie $\alpha^5 + \alpha^2 + 1 = 0$. Znajdź element odwrotny do α w tym ciele.

Zestaw 7. Krzywe eliptyczne

1. Punkty $P = (-3, 9)$ i $Q = (-2, 8)$ leżą na krzywej eliptycznej $y^2 = x^3 - 36x$. Znajdź $P + Q$ oraz $2P$. Wyliczenia zinterpretuj graficznie.
2. Każdy z zadanych punktów na krzywej eliptycznej nad $\mathbb{Q}$ ma skończony rząd. Znajdź ten rząd.
 - (a) $P = (0, 16)$ na krzywej $y^2 = x^3 + 256$,
 - (b) $Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ na krzywej $y^2 = x^3 + \frac{1}{4}x$.
3. Wypisz wszystkie punkty krzywej eliptycznej $E : y^2 = x^3 - 2 \pmod{7}$. Oblicz $(3, 2) + (6, 5)$ oraz $2 \cdot (3, 2)$.
4. Wypisz wszystkie punkty krzywej eliptycznej $E : y^2 = x^3 + x + 6 \pmod{11}$. Z jaką grupą krzywa E jest izmorficzna? Wskaż generator.
5. Wypisz wszystkie punkty krzywej eliptycznej $E : y^2 = x^3 + x + 28 \pmod{71}$. Wykaż, że E nie jest grupą cykliczną. Podaj maksymalny rząd elementu grupy E i wskaż element tego rzędu.

Karta wzorów

Trygonometria

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin x \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$
$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}$$

Całka nieoznaczona

$$\int \frac{1}{x^2 + k^2} dx = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{x}{k} + c, \quad \int \frac{1}{x^2 - k^2} dx = \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{x - k}{x + k} \right| + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + c, \quad \int \frac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{k} + c$$
$$\int \frac{1}{(1 + x^2)^n} dx = \frac{x}{(2n - 2)(1 + x^2)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2n - 2} \int \frac{1}{(1 + x^2)^{n-1}} dx$$

Szeregi funkcyjne

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1]; \quad (1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \right)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$