

Podsumowanie pierwszego wykładu z Analizy Mat. 1 na kierunku "Elektrotechnika"

1 Oznaczenia i definicje logiki matematycznej

Zdania logiczne (oznaczane małymi literami -najczęściej p, q, r, s, \dots lub p_1, p_2, \dots) to takie zdania, którym można przypisać jedną z 2 wartości logicznych: prawdę ($\nu(p) = 1$) lub fałsz -co zapiszemy w tym kursie: $\nu(p) = 0$. Zdania logiczne złożone otrzymujemy stosując **spójniki logiczne**. Dają one następujące wartości:

- negacja: $\neg p$, lub $\sim p$ [wartość przeciwna: $\nu(\neg p) = 1 - \nu(p)$]
- alternatywa: $p \vee q$, gdzie $\nu(p \vee q) = \max(\nu(p), \nu(q))$
- koniunkcja: $p \wedge q$, gdzie $\nu(p \wedge q) = \min(\nu(p), \nu(q)) = \nu(p) \cdot \nu(q)$
- implikacja: $p \Rightarrow q$, gdzie $\nu(p \Rightarrow q) = \max(1 - \nu(p), \nu(q))$
- równoważność $p \Leftrightarrow q$, [$\nu(p \Leftrightarrow q) = 1$ dokładnie wtedy, gdy $\nu(p) = \nu(q)$].

Tautologia, to zdanie złożone prawdziwe przy dowolnych wartościach logicznych występujących w nim "symboli zdań". Sprawdzenie, czy zdanie złożone jest tautologią, przeprowadziliśmy (na wykładzie) przy użyciu tabelki, przez wstawienie wszystkich możliwych wartości zdań prostych w nim występujących.

Funkcje zdaniowe, bądź **formy zdaniowe**, to wyrażenia zawierające zmienne (litery typu n, m, x, y, \dots), które po wstawieniu za nie konkretnych obiektów danej torii (np. liczb, punktów, zbiorów) stają się zdaniami. Formy zdaniowe (np. $\Phi(x)$ lub $\Psi(n)$) mogą być poprzedzone kwantyfikatorami odnoszącymi się do danej zmiennej z formy -opisanej jako symbol pod kwantyfikatorem. **Zmienna z formy zdaniowej zostaje "związana" przez dany kwantyfikator i jeśli jest to jedyna zmienna- otrzymujemy zdanie.**

Są dwa **kwantyfikatory: ogólny** ("dla każdego") -oznaczany \forall (np. $\forall x \Phi(x)$) oraz **szczegółowy** ("istnieje"), ozn. \exists (np. $\exists y \Psi(y)$). Kwantyfikator \forall traktowany jest jako "domyślny" i w zapisie często jest opuszczany. Podobnie, zamiast symbolu koniunkcji, zazwyczaj w zapisie wstawia się przecinek, alternatywę opisuje się słowem "lub". Kwantyfikator $\exists y$ zastępujemy słowami typu: "dla pewnego $y \dots$ " lub "istnieje takie x , że zachodzi $\Psi(y)$ ".

"Kwantyfikatory z ograniczonym zakresem" - np. wyrażenia typu: $\forall_{x \in \mathbb{N}} x > \frac{1}{2}$ lub $\exists_{x < 0} 4^x = \frac{1}{2}$ definiujemy przez równoważności:

$$\forall_{A(x)} B(x) \Leftrightarrow \forall_x [A(x) \Rightarrow B(x)],$$

$$\exists_{A(x)} B(x) \Leftrightarrow \exists_x [A(x) \wedge B(x)].$$

Wyrażenie $\forall_{A(x)} B(x)$ jest prawdziwe, gdy dowolny x spełniający warunek $A(x)$ spełnia też warunek $B(x)$.

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów:

$$\sim [\forall_x P(x)] \Leftrightarrow \exists_x [\sim P(x)], \quad \sim [\exists_x Q(x)] \Leftrightarrow \forall_x [\sim Q(x)], \quad \sim [\exists_{A(x)} B(x)] \Leftrightarrow \forall_{A(x)} [\sim B(x)].$$

Jeszcze jedna reguła: $[(\exists_x P(x)) \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [\forall_x (P(x) \Rightarrow Q)]$.

Dla form zdaniowych, w których zmienną jest liczba naturalna n obowiązuje **zasada indukcji matematycznej**:

$$(P(1) \wedge [P(n) \Rightarrow P(n+1)]) \Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} P(n).$$

Innym często stosowanym sposobem dowodzenia twierdzeń jest tzw. *metoda dowodzenia nie wprost*. Dołączamy do założeń zaprzeczenie tezy, a dowód będzie zakończony, gdy na podstawie tych przesłanek wywnioskujemy sprzeczność -czyli np. zdanie typu $p \wedge (\sim p)$.

Na drugim wykładzie pokażę, jak w ten sposób wykazać, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

2 Zbiory

W teorii mnogości mamy 2 **pojęcia pierwotne**: zbioru, należenia elementu do zbioru (na przykład, $a \in A$). Negację warunku $a \in A$ zapisujemy symbolem $a \notin A$. Definiujemy **zbiór pusty**, \emptyset , do którego żaden element nie należy. Zbiór jednoelementowy, którego jedynym elementem jest a oznaczamy symbolem $\{a\}$. Zbiór, do którego należą jedynie elementy a_1, \dots, a_n zapisujemy jako $\{a_1, \dots, a_n\}$. Kolejność nie jest tu istotna, np. $\{a, b\} = \{b, a\}$. (Ale poniżej zdefiniujemy też parę uporządkowaną $(a; b)$). Ponadto $\{a, a\} = \{a\}$.

Mówimy, że **zbiór B jest podzbiorem zbioru A** , co zapisujemy symbolem $B \subset A$, lub czasem $A \supset B$, co możemy odczytać "A jest nadzbiorem zbioru B", jeśli zachodzi implikacja $x \in B \Rightarrow x \in A$, czyli gdy $\forall_{x \in B} x \in A$.

Jeśli E jest zbiorem, zaś $P(x)$ jest formą zdaniową określoną dla dowolnych elementów x ze zbioru E , to zbiorem jest też ogół tych x będących elementami zbioru E , dla których zdanie $P(x)$ jest prawdziwe. Taki **zbiór wyróżniony (w obrębie zbioru E) przez formę(*) $P(\cdot)$** zapisujemy w postaci

$$(1.1) \quad \{x \in E : P(x)\}.$$

N.p. przedział domknięty $[1, 5]$ osi liczbowej \mathbb{R} , to zbiór $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 5 \wedge x \geq 1\}$. W podobny sposób definiujemy **różnicę mnogościową** pary zbiorów:

$$B \setminus A = \{x \in B : x \notin A\}.$$

Przecięcie (część wspólna, iloczyn mnogościowy) zbiorów A i B , to zbiór $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$. Gdy A_n są zbiorami dla $n \in \mathbb{N}$, to uogólnionym iloczynem mnogościowym tych zbiorów nazywamy zbiór $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, ozn. też $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ zdefiniowany jako $\{x \in A_1 : \forall_{n \in \mathbb{N}} x \in A_n\}$. W tej definicji wyróżniliśmy go jako pewien podzbiór w zbiorze A_1 , ale mogliśmy równie dobrze użyć innego ze zbiorów A_n w roli zbioru E z definicji (1.1).

Zdefiniujemy **sumę mnogościową(*)** ciągu zbiorów A_n - tu nie mamy na ogół zbioru typu E ze wzoru (1.1), w którym ta suma się zawiera i trzeba zagwarantować jej istnienie aksjomatem: "Istnieje zbiór $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ taki, że $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow (\exists_{k \in \mathbb{N}} x \in A_k)$ ". U nas wszystkie zbiory A_n będą zawarte w pewnym zbiorze E (np. w \mathbb{R}), nie musimy wówczas używać "aksjomatu sumy".

Najbardziej ogólna definicja **sumy mnogościowej(*)** dotyczy sumy dla rodziny zbiorów, czyli takiego zbioru \mathcal{A} , którego wszystkie elementy są zbiorami. Mówimy mianowicie, że zbiór (nazwijmy go np. literą B) jest **sumą rodziny \mathcal{A}** , co oznaczamy symbolem $B = \bigcup \mathcal{A}$, jeżeli spełniony jest warunek:

$$x \in B \Leftrightarrow \exists_{E \in \mathcal{A}} x \in E.$$

Analogicznie definiujemy $\bigcap \mathcal{A}$, jako $\{x \in A_1 : \forall_{A \in \mathcal{A}} x \in A\}$, jeśli A_1 jest jednym z elementów rodziny \mathcal{A} . Np. dla $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ zamiast $\bigcap \{A_1, A_2\}$ piszemy $A_1 \cap A_2$, a zamiast $\bigcup \{A_1, A_2\}$ piszemy $A_1 \cup A_2$.

Zbiór potęgowy(*) (ozn. 2^A , lub $\mathcal{P}(A)$) - to zbiór, którego (jedynymi) elementami są wszystkie możliwe podzbiory zbioru A .

Aby zaznaczyć kolejność dwu elementów, wprowadzamy definicję **pary uporządkowanej** -np. $(a; b)$ -gdzie element a nazywamy poprzednikiem, zaś b - następnikiem tej pary:

$$(a; b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

W większości podręczników oznacza się taką parę symbolem (a, b) , ja zamiast przecinka wstawiam średnik, by odróżnić $(a; b)$ od przedziału otwartego o końcach a, b . W odróżnieniu od par nieuporządkowanych, czyli zbiorów $\{a, b\}$ -tu porządek odgrywa rolę i $(a; b) = (c; d) \Leftrightarrow [a = c \wedge b = d]$. Iloczyn kartezjański zbiorów A oraz B , oznaczany $A \times B$, to zbiór wszystkich możliwych par $(a; b)$, gdzie $a \in A, b \in B$.

Dla zbiorów oznaczanych powyżej gwiazdką (*) ich istnienie gwarantują jedynie aksjomaty teorii mnogości. Będziemy ich unikać. Dla iloczynu kartezjańskiego nie trzeba dodatkowego aksjomatu - bo gdy $a \in A, b \in B, C = A \cup B$, to para uporządkowana $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subset 2^C$, należy ona więc do zbioru $E = 2^{2^C}$. Nie można pominąć zbioru E w zapisie (1.1) -prowadziło to do paradoksu Bertranda Russela dla $\mathfrak{M} = \{A : A \text{ jest zbiorem i } A \notin A\}$

3 Relacje, odwzorowania, funkcje

Relacją (binarną, czyli dwuargumentową) między elementami zbiorów A, B nazywamy dowolny podzbiór R iloczynu kartezjańskiego $A \times B$. Zamiast $(a; b) \in R$ piszemy na ogół aRb (np.: (i) $3 \leq 7$, (ii) $\vec{v} \perp \vec{w}$, (iii) $\vec{v} \parallel \vec{w}$, (iv) $n \equiv k \pmod{3}$).

Definicje: Mówimy, że relacja $R \subset A \times A$ jest:

- **przechodnia**, gdy $[(a; b) \in R \wedge (b; c) \in R] \Rightarrow (a; c) \in R$.
- **zwrotna**, gdy $\forall a \in A (a; a) \in R$,
- **symetryczna**, gdy $aRb \Rightarrow bRa$.
- **antysymetryczna**, gdy $[aRb \wedge bRa] \Rightarrow a = b$.

Relacje równoważności, to relacje, które równocześnie są zwrotne, symetryczne i przechodnie (np. (iii), (iv)). Natomiast relacje zwrotne, przechodnie i antisymetryczne nazywamy **relacjami (częściowego) porządku** (np. (i), (ii)).

Odwzorowaniem (a w przypadku $Y \subset \mathbb{R}$ **funkcją**) o dziedzinie $D(f)$, gdzie $D(f) \subset X$ i o wartościach w zbiorze Y nazywamy taką relację $f \subset X \times Y$, dla której zachodzi następujący **warunek jednoznaczności**:

$$(x; y_1) \in f \wedge (x; y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Wówczas dziedziną odwzorowania f nazywamy zbiór

$$D(f) = \{x \in X : \exists y \in Y : (x; y) \in f\}.$$

Zamiast $(x; y) \in f$ piszemy wtedy: $y = f(x)$ oraz $f : X \supset D(f) \rightarrow Y$. Czasami f zadana jest konkretnym wzorem na $f(x)$ i spotkamy się też z zapisem:

$$f : X \supset D(f) \ni x \mapsto f(x) \in Y.$$

Jeśli podany jest jedynie wzór na wartość np. ktoś powie "funkcja $\frac{1}{1-2\sqrt{1-x^2}}$ ", to przyjmujemy, że jej dziedziną jest największą z możliwych (gdy chcemy, by $f(x) \in \mathbb{R}$, to musi być w tym przykładzie $1 - x^2 \geq 0$ oraz $2\sqrt{1-x^2} \neq 1$). Taką maksymalną dziedzinę f nazywamy **dziedziną naturalną** dla tego odwzorowania f . Gdy $D(f) = X$, piszemy $f : X \rightarrow Y$ i jest to najczęściej spotykana forma zapisu.

Definiujemy **obraz zbioru** $E \subset X$ **przez odwzorowanie** f jako zbiór

$$f[E] = \{y \in Y : \exists x \in E : y = f(x)\}.$$

Zbiór ten można też zapisać (nieco mniej formalnie) jako $\{f(x) : x \in E\}$. **Przeciwoobraz zbioru** $B \subset Y$ oznaczany jako $f^{-1}[B]$ definiujemy jako zbiór

$$\{x \in D(f) : f(x) \in B\}.$$

Odwzorowanie $f : X \rightarrow Y$ nazwiemy **odwzorowaniem różnowartościowym** lub **injekcją**, gdy zachodzi implikacja: $[a \in X \wedge b \in X \wedge f(b) = f(a)] \Rightarrow b = a$. Odwzorowaniem **na zbiór** Y lub **surjekcją** nazwiemy f , jeśli $f[X] = Y$, czyli gdy $\forall y \in Y \exists x \in X f(x) = y$.

Bijekcja, to injekcja, która jest zarazem surjekcją. Mówimy, że **zbiory** X, Y są **równoliczne (lub: mają tyle samo elementów)**, gdy istnieje bijekcja $f : X \rightarrow Y$. Zbiór nieskończony, to zbiór X równoliczny z pewnym swoim podzbiorem właściwym ($Y \subset X, Y \neq X$). Np. $k \mapsto k + 1$ jest bijekcją zbioru \mathbb{N} na $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. Można wykazać, że żaden zbiór E nie jest równoliczny ze swoim zbiorem potęgowym 2^E .

Jeśli $R \subset X \times Y$ jest relacją, to definiujemy **relację odwrotną**

$$R^{-1} := \{(y; x) \in Y \times X : (x; y) \in R\}.$$

Relacja odwrotna do odwzorowania –czyli do relacji jednoznacznej (np. f) jest wtedy i tylko wtedy jednoznaczna, gdy f jest injekcją. Dziedziną f^{-1} jest obraz dziedziny $D(f)$ przez f , zwany **przeciw-dziedziną** f , lub **obrazem** f .

(c.d. na następnym wykładzie)