Rachunek prawdopodobieństwa i procesy stochastyczne

Aleksandra Gorzkowska

Elektronika i Telekomunikacja
Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji

Definicja

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie:

Definicja

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie:

1. Ω to przestrzeń zdarzeń elementarnych,

Definicja

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie:

1. Ω to przestrzeń zdarzeń elementarnych,
2. $\mathcal{F}$ to rodzina zdarzeń, czyli podzbiorów Ω, taka że:
   - I. $\mathcal{F} \neq \emptyset$,
   - II. Jeśli $A \in \mathcal{F}$, to $A' \in \mathcal{F}$,
   - III. Jeśli $A_i \in \mathcal{F}$, dla $i = 1, 2, \ldots,$ to $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Definicja

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie:

1. Ω to przestrzeń zdarzeń elementarnych,
2. $\mathcal{F}$ to rodzina zdarzeń, czyli podzbiorów Ω, taka że:
   - I. $\mathcal{F} \neq \emptyset$,
   - II. Jeśli $A \in \mathcal{F}$, to $A' \in \mathcal{F}$,
   - III. Jeśli $A_i \in \mathcal{F}$, dla $i = 1, 2, \ldots$, to $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.
3. P to rozkład prawdopodobieństwa, czyli funkcja $P \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, taka że:
   - I. $\forall A \in \mathcal{F} \colon P(A) \in [0; 1]$,
   - II. $P(\Omega) = 1$,
   - III. Jeśli $A_i \in \mathcal{F}$ dla $i = 1, 2, \ldots$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Uwagi do rodziny zdarzeń $\mathcal{F}$

Rodzinę zbiorów spełniającą podane warunki nazywamy σ-ciałem.

Uwagi do rodziny zdarzeń $\mathcal{F}$

Rodzinę zbiorów spełniającą podane warunki nazywamy σ-ciałem.

Jeśli Ω jest zbiorem skończonym, to najczęściej jako $\mathcal{F}$ przyjmujemy 2^Ω.

Uwagi do rodziny zdarzeń $\mathcal{F}$

Rodzinę zbiorów spełniającą podane warunki nazywamy σ-ciałem.

Jeśli Ω jest zbiorem skończonym, to najczęściej jako $\mathcal{F}$ przyjmujemy 2^{Ω}.

Jeśli zdarzenia elementarne są liczbami rzeczywistymi, to $\mathcal{F}$ najczęściej **nie jest** zbiorem wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}$.

Uwagi do rodziny zdarzeń $\mathcal{F}$

Rodzinę zbiorów spełniającą podane warunki nazywamy σ-ciałem.

Jeśli Ω jest zbiorem skończonym, to najczęściej jako $\mathcal{F}$ przyjmujemy 2^{Ω}.

Jeśli zdarzenia elementarne są liczbami rzeczywistymi, to $\mathcal{F}$ najczęściej **nie jest** zbiorem wszystkich podzbiorów $\mathbb{R}$.

Najmniejsze w sensie inkluzji σ-ciało zawierające zbiory otwarte na $\mathbb{R}$ nazywamy σ-ciałem zbiorów borelowskich.
Oznaczenie: $\mathcal{B}$

Definicja

Funkcję $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy zmienną losową, jeśli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$.

Definicja

Funkcję $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy zmienną losową, jeśli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$.

Definicja

Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej nazywamy funkcję $P_X\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną następująco

$$P_X(A) = P(\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in A\}) = P(X \in A).$$

Definicja

Funkcję $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy zmienną losową, jeśli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$.

Definicja

Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej nazywamy funkcję $P_X\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną następująco

$$P_X(A) = P(\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in A\}) = P(X \in A).$$

Przykład

Rozkład Poissona
Niech $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, przy czym X może przyjmować jedynie wartości ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots\}$.
$P_X(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, gdzie $\lambda > 0$
Oznaczenie: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Definicja

Funkcję $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną przez $F(x) = P_X((-\infty; x]) = P(\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \leq x\})$ nazywamy **dystrybuantą** rozkładu zmiennej losowej X.

Definicja

Funkcję $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną przez $F(x) = P_X((-\infty; x]) = P(\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \leq x\})$ nazywamy dystrybuantą rozkładu zmiennej losowej X.

Definicja

Mówimy, że zmienna losowa X o dystrybuancie F jest typu ciągłego, jeśli istnieje taka funkcja dodatnia f, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{dt}$.

Funkcję f nazywamy gęstością rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

Przykład

Zmienna losowa o rozkładzie wykładniczym o parametrze λ zadana przez gęstość rozkładu:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

Oznaczenie: $X \sim \exp(\lambda)$

Parametry rozkładu

Definicja

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę określoną:

Definicja

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę określoną:

ⓐ $$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p(x_k),$$
gdzie X jest dyskretną zmienną losową, $p(x_k) = P_X(X = k)$ oraz $\sum_{k=0}^{\infty} p(x_k) = 1$, o ile szereg $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| p(x_k)$ jest zbieżny.

Definicja

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę określoną:

(a) $$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p(x_k),$$
gdzie X jest dyskretną zmienną losową, $p(x_k) = P_X(X = k)$ oraz $\sum_{k=0}^{\infty} p(x_k) = 1$, o ile szereg $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| p(x_k)$ jest zbieżny.

(b) $$\mathrm{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \mathrm{dx},$$
gdzie X jest zmienną losową typu ciągłego o gęstości f, o ile całka $\int_{\mathbb{R}} |x| f(x) \mathrm{dx}$ jest zbieżna.

Definicja

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę określoną:

a. $$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p(x_k),$$
gdzie X jest dyskretną zmienną losową, $p(x_k) = P_X(X = k)$ oraz $\sum_{k=0}^{\infty} p(x_k) = 1$, o ile szereg $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| p(x_k)$ jest zbieżny.

b. $$\mathrm{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \mathrm{dx},$$
gdzie X jest zmienną losową typu ciągłego o gęstości f, o ile całka $\int_{\mathbb{R}} |x| f(x) \mathrm{dx}$ jest zbieżna.

Uwaga: Dla dowolnych zmiennych losowych X oraz Y, a także dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\mathrm{E}(aX + bY) = a\mathrm{E}(X) + b\mathrm{E}(Y)$$

Definicja

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\Big(\big(X - \mathrm{E}(X)\big)^2\Big) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X).$$

Definicja

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\Big(\big(X - \mathrm{E}(X)\big)^2\Big) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X).$$

Przykład

Zmienna losowa o rozkładzie normalnym o gęstości rozkładu:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

gdzie $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$ oraz $\mathrm{E}(X) = m$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

Oznaczenie: $X \sim \mathrm{N}(m, \sigma^2)$

Definicja

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\Big(\big(X - \mathrm{E}(X)\big)^2\Big) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X).$$

Definicja

Kowariancją zmiennych losowych X oraz Y nazywamy liczbę

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{E}\Big(\big(X - \mathrm{E}(X)\big)\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)\Big) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y).$$

Definicja

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$, określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej, nazywamy niezależnymi, jeśli dla dowolnych zbiorów borelowskich $A_1, A_2, \ldots, A_n$, zdarzenia $Z_i = \{\omega\colon X_i(\omega) \in A_i\}$ spełniają relację

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} Z_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(Z_i).$$

Definicja

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$, określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej, nazywamy niezależnymi, jeśli dla dowolnych zbiorów borelowskich $A_1, A_2, \ldots, A_n$, zdarzenia $Z_i = \{\omega\colon X_i(\omega) \in A_i\}$ spełniają relację

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} Z_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(Z_i).$$

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ nazywamy niezależnymi, jeśli dla każdego n zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne.

Definicja

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$, określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej, nazywamy niezależnymi, jeśli dla dowolnych zbiorów borelowskich $A_1, A_2, \ldots, A_n$, zdarzenia $Z_i = \{\omega\colon X_i(\omega) \in A_i\}$ spełniają relację

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} Z_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(Z_i).$$

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ nazywamy niezależnymi, jeśli dla każdego n zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne.

Uwaga: Jeśli zmienne losowe są niezależne, to $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Procesy stochastyczne

Definicja

Procesem stochastycznym nazywamy funkcję $X\colon T \times \Omega \to \mathbb{R}$, gdzie $T \subset \mathbb{R}$, taką że dla każdego ustalonego $t \in T$ funkcja X, traktowana jako funkcja argumentu ω, jest zmienną losową.

Oznaczenie: $X(t, \omega) = X_t(\omega)$.

Definicja

Procesem stochastycznym nazywamy funkcję $X\colon T \times \Omega \to \mathbb{R}$, gdzie $T \subset \mathbb{R}$, taką że dla każdego ustalonego $t \in T$ funkcja X, traktowana jako funkcja argumentu ω, jest zmienną losową.

Oznaczenie: $X(t, \omega) = X_t(\omega)$.

Definicja

Dla ustalonego $\omega \in \Omega$ funkcję $x\colon T \to \mathbb{R}$, taką że $x(t) = X(t, \omega)$ nazywamy trajektorią procesu stochastycznego.

Przykład

Niech A i B będą niezależnymi zmiennymi o rozkładzie:

$$A \sim \mathrm{N}(m_A, \sigma_A^2), B \sim \mathrm{N}(m_B, \sigma_B^2)$$

Punkt materialny w chwili $t = 0$ znajduje się w położeniu B na osi x, a następnie porusza się po tej osi z prędkością A. Położenie punktu na osi x w chwili t opisuje funkcja:
$X(t, \omega) = tA(\omega) + B(\omega)$

Definicja

Proces stochastyczny nazywamy procesem stochastycznym o przyrostach niezależnych, jeśli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$, dowolnych $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ zmienne losowe X_{t_0}, $X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ są niezależne.

Definicja

Proces stochastyczny nazywamy procesem stochastycznym o przyrostach niezależnych, jeśli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$, dowolnych $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ zmienne losowe X_{t_0}, $X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ są niezależne.

Przykład

1. Proces Poissona
   proces o przyrostach niezależnych, $T = [0; \infty)$,
   $\forall t_1 < t_2 \colon X_{t_2} - X_{t_1} \sim \mathcal{P}(\lambda(t_2 - t_1))$, $X_0 = 0$

Definicja

Proces stochastyczny nazywamy procesem stochastycznym o przyrostach niezależnych, jeśli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$, dowolnych $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ zmienne losowe X_{t_0}, $X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ są niezależne.

Przykład

1. Proces Poissona
   proces o przyrostach niezależnych, $T = [0; \infty)$,
   $\forall t_1 < t_2 \colon X_{t_2} - X_{t_1} \sim \mathcal{P}(\lambda(t_2 - t_1))$, $X_0 = 0$
2. Proces Wienera
   proces o przyrostach niezależnych, $T = [0; \infty)$,
   $\forall t_1 < t_2 \colon W_{t_2} - W_{t_1} \sim \mathrm{N}(0, t_2 - t_1)$, $W_0 = 0$, trajektorie procesu są ciągłe

Definicja

Proces stochastyczny $X\colon T \times \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy stacjonarnym (w szerszym sensie), jeśli:

1. $\mathrm{E}(X_t) = \text{const.}\ \forall t \in T$,
2. $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = f(t - s)$, $\forall t \geq s$,
3. $\mathrm{E}(X_t^2) < \infty$, $\forall t \in T$.

Definicja

Proces stochastyczny $X\colon T \times \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy stacjonarnym (w szerszym sensie), jeśli:

1. $\mathrm{E}(X_t) = \text{const.}\ \forall t \in T$,
2. $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = f(t-s),\ \forall t \geq s$,
3. $\mathrm{E}(X_t^2) < \infty,\ \forall t \in T$.

Przykład

1. Proces Poissona

Definicja

Proces stochastyczny $X \colon T \times \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy stacjonarnym (w szerszym sensie), jeśli:

1. $\mathrm{E}(X_t) = \text{const.}\ \forall t \in T$,
2. $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = f(t-s)$, $\forall t \geq s$,
3. $\mathrm{E}(X_t^2) < \infty$, $\forall t \in T$.

Przykład

1. Proces Poissona
2. Proces Wienera

Model AR (autoregresyjny) $\mathrm{AR}(p)$, $T \in \mathbb{N}$

$$X_0 = 0, X_t = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i X_{t-i} + \epsilon_t,$$

gdzie $\epsilon_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ i zmienne losowe ϵ_t są niezależne

Dla $p = 1$ mamy $X_0 = 0, X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \epsilon_t$.
Jest to proces stacjonarny:

1. $\mathrm{E}(X_t) = 0$, $\forall t \in T$,
2. $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \varphi_1^{t-s} \cdot \frac{\sigma^2}{1-\varphi_1}$, $\forall t \geq s$,
3. $\mathrm{E}(X_t^2) < \infty$, $\forall t \in T$.