

Algorytm Forda-Fulkersona

Aleksandra Gorzkowska

Elektronika i Telekomunikacja
Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji

Definicja

Sięcią nazywamy parę (D, c) , gdzie $D = (V, A)$ to digraf, $c: A \rightarrow [0; \infty)$. Funkcję c nazywamy **funkcją wagową**.

Definicja

Siecią nazywamy parę (D, c) , gdzie $D = (V, A)$ to digraf, $c: A \rightarrow [0; \infty)$. Funkcję c nazywamy **funkcją wagową**.

W sieci $N = (V, A, c)$ funkcję c będziemy nazywać **przepustowością**.

Definicja

Siecią nazywamy parę (D, c) , gdzie $D = (V, A)$ to digraf, $c: A \rightarrow [0; \infty)$. Funkcję c nazywamy **funkcją wagową**.

W sieci $N = (V, A, c)$ funkcję c będziemy nazywać **przepustowością**. Wyróżniamy dwa wierzchołki s -źródło oraz t -ujście.

Definicja

Przepływem z s do t w sieci N nazywamy funkcję $f: A \rightarrow [0; \infty)$, taką że:

- 1 $\forall xy \in A \ f(xy) \leq c(xy),$
- 2 $\forall x \in V \setminus \{s, t\}: \sum_{y \in N^+(x)} f(xy) = \sum_{z \in N^-(x)} f(zx)$

Definicja

Przepływem z s do t w sieci N nazywamy funkcję $f: A \rightarrow [0; \infty)$, taką że:

- ① $\forall xy \in A \ f(xy) \leq c(xy),$
- ② $\forall x \in V \setminus \{s, t\}: \sum_{y \in N^+(x)} f(xy) = \sum_{z \in N^-(x)} f(zx)$

Funkcję $w(f) = \sum_{y \in N^+(s)} f(sy) - \sum_{z \in N^-(s)} f(zs)$ nazywamy **wartością przepływu**.

Definicja

Przepływem z s do t w sieci N nazywamy funkcję $f: A \rightarrow [0; \infty)$, taką że:

- ① $\forall xy \in A \ f(xy) \leq c(xy)$,
- ② $\forall x \in V \setminus \{s, t\}: \sum_{y \in N^+(x)} f(xy) = \sum_{z \in N^-(x)} f(zx)$

Funkcję $w(f) = \sum_{y \in N^+(s)} f(sy) - \sum_{z \in N^-(s)} f(zs)$ nazywamy **wartością przepływu**.

Przepływ nazywamy **maksymalnym**, jeśli ma największą możliwą wartość.

Definicja

Przepływem z s do t w sieci N nazywamy funkcję $f: A \rightarrow [0; \infty)$, taką że:

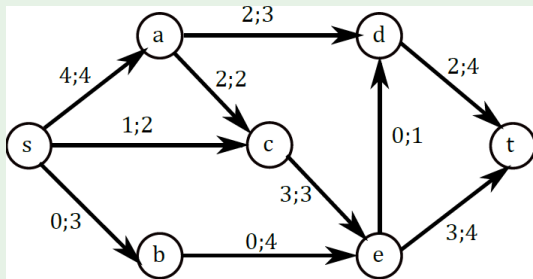
- ① $\forall xy \in A \quad f(xy) \leq c(xy),$
- ② $\forall x \in V \setminus \{s, t\}: \quad \sum_{y \in N^+(x)} f(xy) = \sum_{z \in N^-(x)} f(zx)$

Funkcję $w(f) = \sum_{y \in N^+(s)} f(sy) - \sum_{z \in N^-(s)} f(zs)$ nazywamy **wartością przepływu**.

Przepływ nazywamy **maksymalnym**, jeśli ma największą możliwą wartość.

Jaki jest przepływ maksymalny w danej sieci?

Przykład



Definicja

Przekrojem oddzielającym s od t w sieci N nazywamy zbiór łuków $A(S, T): = \{xy \in A: x \in S, y \in T\}$, gdzie $V = S \cup T$, $S \cap T = \emptyset$, $s \in S$, $t \in T$.

Definicja

Przekrojem oddzielającym s od t w sieci N nazywamy zbiór łuków $A(S, T): = \{xy \in A: x \in S, y \in T\}$, gdzie $V = S \cup T$, $S \cap T = \emptyset$, $s \in S$, $t \in T$.

Liczbę $c(S, T): = \sum_{xy \in A(S, T)} c(xy)$ nazywamy **przepustowością przekroju**.

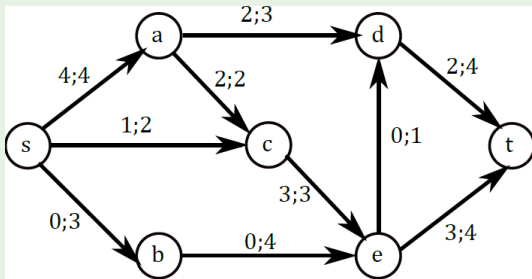
Definicja

Przekrojem oddzielającym s od t w sieci N nazywamy zbiór łuków $A(S, T): = \{xy \in A: x \in S, y \in T\}$, gdzie $V = S \cup T$, $S \cap T = \emptyset$, $s \in S$, $t \in T$.

Liczbę $c(S, T): = \sum_{xy \in A(S, T)} c(xy)$ nazywamy **przepustowością przekroju**.

Przekrój nazywamy **minimalnym**, jeśli ma najmniejszą możliwą przepustowość.

Przykład



Twierdzenie

W sieci $N = (V, A, c)$ o źródle s i ujściu t dla dowolnego przepływu f oraz dowolnego przekroju $A(S, T)$ zachodzi nierówność $w(f) \leq c(S, T)$.

Twierdzenie

W sieci $N = (V, A, c)$ o źródle s i ujściu t dla dowolnego przepływu f oraz dowolnego przekroju $A(S, T)$ zachodzi nierówność $w(f) \leq c(S, T)$.

Uwaga! Dla każdego przepływu f oraz przekroju $A(S, T)$ zachodzi

$$w(f) = \sum_{x \in S, y \in T} f(xy) - \sum_{x \in S, z \in T} f(zx)$$

Twierdzenie

W sieci $N = (V, A, c)$ o źródle s i ujściu t dla dowolnego przepływu f oraz dowolnego przekroju $A(S, T)$ zachodzi nierówność $w(f) \leq c(S, T)$.

Uwaga! Dla każdego przepływu f oraz przekroju $A(S, T)$ zachodzi

$$w(f) = \sum_{x \in S, y \in T} f(xy) - \sum_{x \in S, z \in T} f(zx)$$

Wniosek

Dla każdego przepływu f zachodzi

$$w(f) = \sum_{z \in N^-(t)} f(zt) - \sum_{y \in N^+(t)} f(ty)$$

Twierdzenie (Ford, Fulkerson, 1956)

Wartość maksymalnego przepływu ze źródła s do ujścia t w sieci jest równa przepustowości minimalnego przekroju oddzielającego s od t .

Twierdzenie (Ford, Fulkerson, 1956)

Wartość maksymalnego przepływu ze źródła s do ujścia t w sieci jest równa przepustowości minimalnego przekroju oddzielającego s od t .

$$\max\{w(f): f\text{-przepływ}\} = \min\{c(S, T): A(S, T)\text{-przekrój } s - t\}$$

Algorytm Forda-Fulkersona

Wejście: Sieć $N = (V, A, c)$ oraz przepływ początkowy f

Wyjście: przepływ maksymalny, przekrój minimalny

Algorytm Forda-Fulkersona

Wejście: Sieć $N = (V, A, c)$ oraz przepływ początkowy f

Wyjście: przepływ maksymalny, przekrój minimalny

- 1 Wierzchołkowi s nadaj cechę $(-, \infty)$

Algorytm Forda-Fulkersona

Wejście: Sieć $N = (V, A, c)$ oraz przepływ początkowy f

Wyjście: przepływ maksymalny, przekrój minimalny

- 1 Wierzchołkowi s nadaj cechę $(-, \infty)$
- 2 Jeśli x odcachowany $(z^{\pm}, \epsilon(x))$, ale nie sprawdzony dla wszystkich nieocachowanych y sąsiadów x :

Algorytm Forda-Fulkersona

Wejście: Sieć $N = (V, A, c)$ oraz przepływ początkowy f

Wyjście: przepływ maksymalny, przekrój minimalny

- ① Wierzchołkowi s nadaj cechę $(-, \infty)$
- ② Jeśli x ocechowany $(z^\pm, \epsilon(x))$, ale nie sprawdzony dla wszystkich nieocechowanych y sąsiadów x :
 - jeśli $y \in N^+(x)$, $f(xy) < c(xy)$, to nadaj y cechę $(x^+, \epsilon(y) = \min\{\epsilon(x), c(xy) - f(xy)\})$

Algorytm Forda-Fulkersona

Wejście: Sieć $N = (V, A, c)$ oraz przepływ początkowy f

Wyjście: przepływ maksymalny, przekrój minimalny

- 1 Wierzchołkowi s nadaj cechę $(-, \infty)$
- 2 Jeśli x ocechowany $(z^\pm, \epsilon(x))$, ale nie sprawdzony dla wszystkich nieocechowanych y sąsiadów x :
 - jeśli $y \in N^+(x)$, $f(xy) < c(xy)$, to nadaj y cechę $(x^+, \epsilon(y) = \min\{\epsilon(x), c(xy) - f(xy)\})$
 - jeśli $y \in N^-(x)$, $f(yx) > 0$, to nadaj y cechę $(x^-, \epsilon(y) = \min\{\epsilon(x), f(yx)\})$

Algorytm Forda-Fulkersona

Wejście: Sieć $N = (V, A, c)$ oraz przepływ początkowy f

Wyjście: przepływ maksymalny, przekrój minimalny

- 1 Wierzchołkowi s nadaj cechę $(-, \infty)$
- 2 Jeśli x ocechowany ($z^\pm, \epsilon(x)$), ale nie sprawdzony dla wszystkich nieocechowanych y sąsiadów x :
 - jeśli $y \in N^+(x)$, $f(xy) < c(xy)$, to nadaj y cechę $(x^+, \epsilon(y) = \min\{\epsilon(x), c(xy) - f(xy)\})$
 - jeśli $y \in N^-(x)$, $f(yx) > 0$, to nadaj y cechę $(x^-, \epsilon(y) = \min\{\epsilon(x), f(yx)\})$
- 3 Jeśli:
 - ujęcie ocechowane, idź do 4.
 - ujęcie nieocechowane i istnieje ocechowany, nie sprawdzony wierzchołek, to idź do 2

Algorytm Forda-Fulkersona

Wejście: Sieć $N = (V, A, c)$ oraz przepływ początkowy f

Wyjście: przepływ maksymalny, przekrój minimalny

- ① Wierzchołkowi s nadaj cechę $(-, \infty)$
- ② Jeśli x ocechowany $(z^\pm, \epsilon(x))$, ale nie sprawdzony dla wszystkich nieocechowanych y sąsiadów x :
 - jeśli $y \in N^+(x)$, $f(xy) < c(xy)$, to nadaj y cechę $(x^+, \epsilon(y) = \min\{\epsilon(x), c(xy) - f(xy)\})$
 - jeśli $y \in N^-(x)$, $f(yx) > 0$, to nadaj y cechę $(x^-, \epsilon(y) = \min\{\epsilon(x), f(yx)\})$
- ③ Jeśli:
 - ujęcie ocechowane, idź do 4.
 - ujęcie nieocechowane i istnieje ocechowany, nie sprawdzony wierzchołek, to idź do 2
 - nie można nadać więcej cech, to KONIEC

Algorytm Forda-Fulkersona

4 Modyfikuj przepływ:

Algorytm Forda-Fulkersona

4 Modyfikuj przepływ:

- jeśli t ma cechę $(z^+, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(zt) = f(zt) + \epsilon(t)$ i idź do z ,

Algorytm Forda-Fulkersona

4 Modyfikuj przepływ:

- jeśli t ma cechę $(z^+, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(zt) = f(zt) + \epsilon(t)$ i idź do z ,
- jeśli t ma cechę $(z^-, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(tz) = f(tz) - \epsilon(t)$ i idź do z .

Algorytm Forda-Fulkersona

4 Modyfikuj przepływ:

- jeśli t ma cechę $(z^+, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(zt) = f(zt) + \epsilon(t)$ i idź do z ,
- jeśli t ma cechę $(z^-, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(tz) = f(tz) - \epsilon(t)$ i idź do z .
- jeśli z ma cechę $(x^+, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(xz) = f(xz) + \epsilon(t)$ i idź do x ,

Algorytm Forda-Fulkersona

4 Modyfikuj przepływ:

- jeśli t ma cechę $(z^+, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(zt) = f(zt) + \epsilon(t)$ i idź do z ,
- jeśli t ma cechę $(z^-, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(tz) = f(tz) - \epsilon(t)$ i idź do z .
- jeśli z ma cechę $(x^+, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(xz) = f(xz) + \epsilon(t)$ i idź do x ,
- jeśli z ma cechę $(y^-, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(zy) = f(zy) - \epsilon(t)$ i idź do y .

Algorytm Forda-Fulkersona

4 Modyfikuj przepływ:

- jeśli t ma cechę $(z^+, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(zt) = f(zt) + \epsilon(t)$ i idź do z ,
- jeśli t ma cechę $(z^-, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(tz) = f(tz) - \epsilon(t)$ i idź do z .
- jeśli z ma cechę $(x^+, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(xz) = f(xz) + \epsilon(t)$ i idź do x ,
- jeśli z ma cechę $(y^-, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(zy) = f(zy) - \epsilon(t)$ i idź do y .

4 Idź do 1.

Algorytm Forda-Fulkersona

4 Modyfikuj przepływ:

- jeśli t ma cechę $(z^+, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(zt) = f(zt) + \epsilon(t)$ i idź do z ,
- jeśli t ma cechę $(z^-, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(tz) = f(tz) - \epsilon(t)$ i idź do z .
- jeśli z ma cechę $(x^+, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(xz) = f(xz) + \epsilon(t)$ i idź do x ,
- jeśli z ma cechę $(y^-, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(zy) = f(zy) - \epsilon(t)$ i idź do y .

4 Idź do 1.

Wartość maksymalnego przepływu: sumujemy przepływy wychodzące ze źródła s .

Algorytm Forda-Fulkersona

4 Modyfikuj przepływ:

- jeśli t ma cechę $(z^+, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(zt) = f(zt) + \epsilon(t)$ i idź do z ,
- jeśli t ma cechę $(z^-, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(tz) = f(tz) - \epsilon(t)$ i idź do z .
- jeśli z ma cechę $(x^+, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(xz) = f(xz) + \epsilon(t)$ i idź do x ,
- jeśli z ma cechę $(y^-, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(zy) = f(zy) - \epsilon(t)$ i idź do y .

4 Idź do 1.

Wartość maksymalnego przepływu: sumujemy przepływy wychodzące ze źródła s . Minimalny przekrój: S - wierzchołki ocechowane w ostatnim kroku, T - wierzchołki nieocechowane w ostatnim kroku

Przykład

