Teoria grafów - część I

Aleksandra Gorzkowska

Elektronika i Telekomunikacja
Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji

4 kwietnia 2023

Definicja

Grafem (prostym) nazywamy parę (V, E), gdzie V to niepusty zbiór skończony, a E to podzbiór dwuelementowych podzbiorów zbioru V. Oznaczenie: $E \subset \binom{V}{2}$;
$\binom{V}{2}$ - zbiór wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru V

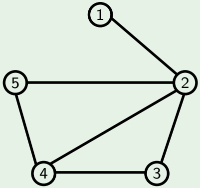
Definicja

Grafem (prostym) nazywamy parę (V, E), gdzie V to niepusty zbiór skończony, a E to podzbiór dwuelementowych podzbiorów zbioru V. Oznaczenie: $E \subset \binom{V}{2}$;
$\binom{V}{2}$ - zbiór wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru V

Terminologia i oznaczenia:
Zbiór V nazywamy zbiorem wierzchołków grafu;
Zbiór E nazywamy zbiorem krawędzi grafu.

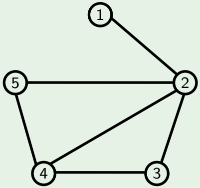
Piszemy i czytamy:
$x, y \in V$ - x i y są wierzchołkami grafu;
$e = \{x, y\} \in E$ - zbiór $\{x, y\}$ jest krawędzią grafu (oznaczoną e);
dla uproszczenia: $xy \in E$ - xy jest krawędzią grafu

Przykład



$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\},$
$\{4, 5\}\}$
lub prościej: $E = \{12, 23, 24, 25, 34, 45\}$

Przykład



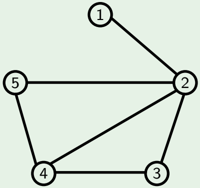
$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
lub prościej: $E = \{12, 23, 24, 25, 34, 45\}$

Definicja

Rzędem grafu $G = (V, E)$ nazywamy liczbę jego wierzchołków, tj. moc zbioru V.
Oznaczenie: $|G| := |V|$

Rozmiarem grafu $G = (V, E)$ nazywamy liczbę jego krawędzi, tj. moc zbioru E.
Oznaczenie: $||G|| := |E|$

Przykład



$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
lub prościej: $E = \{12, 23, 24, 25, 34, 45\}$
|G|=5; ||G||=6

Definicja

Rzędem grafu $G = (V, E)$ nazywamy liczbę jego wierzchołków, tj. moc zbioru V.
Oznaczenie: $|G| := |V|$

Rozmiarem grafu $G = (V, E)$ nazywamy liczbę jego krawędzi, tj. moc zbioru E.
Oznaczenie: $||G|| := |E|$

Modyfikacje definicji

Definicja

Multigrafem nazywamy parę (V, E), gdzie V jak poprzednio, natomiast E jest multizbiorem o elementach ze zbioru $\binom{V}{2}$, czyli dopuszczamy krawędzie wielokrotne.

Modyfikacje definicji

Definicja

Multigrafem nazywamy parę (V, E), gdzie V jak poprzednio, natomiast E jest multizbiorem o elementach ze zbioru $\binom{V}{2}$, czyli dopuszczamy krawędzie wielokrotne.

Definicja

Pseudografem nazywamy parę (V, E), gdzie V jak poprzednio, natomiast w zbiorze E dopuszczamy pętle, czyli krawędzie postaci xx, gdzie $x \in V$.

Modyfikacje definicji

Definicja

Multigrafem nazywamy parę (V, E), gdzie V jak poprzednio, natomiast E jest multizbiorem o elementach ze zbioru $\binom{V}{2}$, czyli dopuszczamy krawędzie wielokrotne.

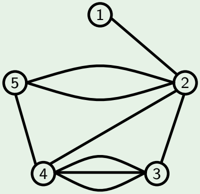
Definicja

Pseudografem nazywamy parę (V, E), gdzie V jak poprzednio, natomiast w zbiorze E dopuszczamy pętle, czyli krawędzie postaci xx, gdzie $x \in V$.

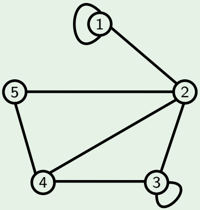
Definicja

Digrafem nazywamy parę (V, A), gdzie V jak poprzednio, natomiast A jest zbiorem par uporządkowanych o elementach ze zbioru V. Tj. $A \subset \{(x, y) \colon x, y \in V\}$; A nazywamy zbiorem łuków

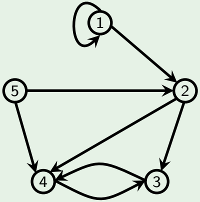
Przykład



multigraf

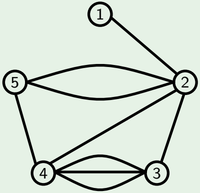


pseudograf

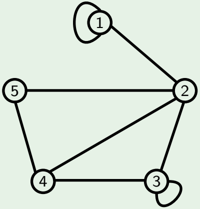


digraf

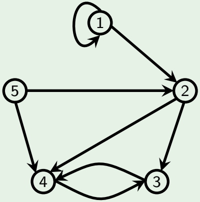
Przykład



multigraf



pseudograf



digraf

Uwaga: Jeśli nie jest powiedziane inaczej to przez "graf" rozumiemy graf prosty.

Dany jest graf $G = (V, E)$

Definicja

Stopniem wierzchołka x w grafie G nazywamy liczbę krawędzi, do których należy dany wierzchołek.
Oznaczenie: $\deg_G(x)$ lub $d_G(x)$;
jeśli nie powoduje to niejasności, to piszemy: $\deg(x)$, $d(x)$

Dany jest graf $G = (V, E)$

Definicja

Stopniem wierzchołka x w grafie G nazywamy liczbę krawędzi, do których należy dany wierzchołek.
Oznaczenie: $\deg_G(x)$ lub $\mathrm{d}_G(x)$;
jeśli nie powoduje to niejasności, to piszemy: $\deg(x)$, $\mathrm{d}(x)$

Wierzchołek stopnia 0 nazywamy izolowanym.
Wierzchołek stopnia 1 nazywamy wiszącym lub liściem.

Dany jest graf $G = (V, E)$

Definicja

Stopniem wierzchołka x w grafie G nazywamy liczbę krawędzi, do których należy dany wierzchołek.
Oznaczenie: $\mathrm{deg}_G(x)$ lub $\mathrm{d}_G(x)$;
jeśli nie powoduje to niejasności, to piszemy: $\mathrm{deg}(x)$, $\mathrm{d}(x)$

Wierzchołek stopnia 0 nazywamy izolowanym.
Wierzchołek stopnia 1 nazywamy wiszącym lub liściem.

Dla przykładu ze slajdu 3:
$\mathrm{d}(1) = 1$ - wierzchołek wiszący, $\mathrm{d}(2) = 4$, $\mathrm{d}(3) = 2$, $\mathrm{d}(4) = 3$, $\mathrm{d}(5) = 2$

Jeśli w grafie G istnieje krawędź xy, to mówimy, że wierzchołki x i y są sąsiednie oraz że są incydentne z krawędzią $e = xy$.

Definicja

Sąsiedztwem wierzchołka x w grafie G nazywamy zbiór wszystkich wierzchołków grafu G połączonych z x krawędzią.
Oznaczenie: $\mathrm{N}_G(x) = \mathrm{N}(x) := \{y \in V(G) \colon xy \in E(G)\}$

Jeśli w grafie G istnieje krawędź xy, to mówimy, że wierzchołki x i y są sąsiednie oraz że są incydentne z krawędzią $e = xy$.

Definicja

Sąsiedztwem wierzchołka x w grafie G nazywamy zbiór wszystkich wierzchołków grafu G połączonych z x krawędzią.
Oznaczenie: $\mathrm{N}_G(x) = \mathrm{N}(x) := \{y \in V(G) \colon xy \in E(G)\}$

Uwaga: W grafie prostym $d(x) = |N(x)|$.

Jeśli w grafie G istnieje krawędź xy, to mówimy, że wierzchołki x i y są sąsiednie oraz że są incydentne z krawędzią $e = xy$.

Definicja

Sąsiedztwem wierzchołka x w grafie G nazywamy zbiór wszystkich wierzchołków grafu G połączonych z x krawędzią.
Oznaczenie: $\mathrm{N}_G(x) = \mathrm{N}(x) := \{y \in V(G) \colon xy \in E(G)\}$

Uwaga: W grafie prostym $d(x) = |N(x)|$.

Krawędzie $e, f \in E(G)$ nazywamy sąsiednimi, jeśli $e \cap f \neq \emptyset$, czyli istnieje wierzchołek incydentny zarówno z krawędzią e, jak i z krawędzią f.

Jeśli w grafie G istnieje krawędź xy, to mówimy, że wierzchołki x i y są sąsiednie oraz że są incydentne z krawędzią $e = xy$.

Definicja

Sąsiedztwem wierzchołka x w grafie G nazywamy zbiór wszystkich wierzchołków grafu G połączonych z x krawędzią.
Oznaczenie: $\mathrm{N}_G(x) = \mathrm{N}(x) := \{y \in V(G) \colon xy \in E(G)\}$

Uwaga: W grafie prostym $d(x) = |N(x)|$.

Krawędzie $e, f \in E(G)$ nazywamy sąsiednimi, jeśli $e \cap f \neq \emptyset$, czyli istnieje wierzchołek incydentny zarówno z krawędzią e, jak i z krawędzią f.

Dla przykładu ze slajdu 3:
$\mathrm{N}(3) = \{2, 4\}; \mathrm{N}(4) = \{2, 3, 5\}$

Twierdzenie (Lemat o uściskach dłoni)

Jeśli $G = (V, E)$ *jest grafem prostym, to*

$$\sum_{v \in V} \mathrm{d}(v) = 2|E|.$$

Twierdzenie (Lemat o uściskach dłoni)

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem prostym, to

$$\sum_{v \in V} \mathrm{d}(v) = 2|E|.$$

Wniosek

W grafie prostym liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.

Wniosek

W grafie prostym liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.

Dowód.

$G = (V, E)$

Niech V_1 - zbiór wierzchołków stopnia nieparzystego; V_2 - zbiór wierzchołków stopnia parzystego; $V = V_1 \cup V_2$. Wtedy:

$2|E| = \sum_{x \in V_1} \mathrm{d}(x) + \underbrace{\sum_{x \in V_2} \mathrm{d}(x)}_{\textit{parzyste}} \Rightarrow \sum_{x \in V_1} \mathrm{d}(x)$ - parzyste, a jest to suma liczb nieparzystych. Stąd liczba składników w sumie musi być parzysta. $\square$

Definicja

Stopniem minimalnym grafu G nazywamy najmniejszy spośród stopni wierzchołków tego grafu.
Oznaczenie: $\delta(G) := \min\{\mathrm{d}(x) \colon x \in V(G)\}$

Stopniem maksymalnym grafu G nazywamy największy spośród stopni wierzchołków tego grafu.
Oznaczenie: $\Delta(G) := \max\{\mathrm{d}(x) \colon x \in V(G)\}$

Definicja

Stopniem minimalnym grafu G nazywamy najmniejszy spośród stopni wierzchołków tego grafu.
Oznaczenie: $\delta(G) := \min\{\mathrm{d}(x) \colon x \in V(G)\}$

Stopniem maksymalnym grafu G nazywamy największy spośród stopni wierzchołków tego grafu.
Oznaczenie: $\Delta(G) := \max\{\mathrm{d}(x) \colon x \in V(G)\}$

Dla przykładu ze slajdu 3:
$\delta(G) = 1$, $\Delta(G) = 4$

Definicja

Stopniem minimalnym grafu G nazywamy najmniejszy spośród stopni wierzchołków tego grafu.
Oznaczenie: $\delta(G) := \min\{\mathrm{d}(x) \colon x \in V(G)\}$

Stopniem maksymalnym grafu G nazywamy największy spośród stopni wierzchołków tego grafu.
Oznaczenie: $\Delta(G) := \max\{\mathrm{d}(x) \colon x \in V(G)\}$

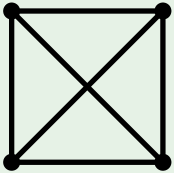
Dla przykładu ze slajdu 3:
$\delta(G) = 1$, $\Delta(G) = 4$

Graf nazywamy regularnym, jeśli wszystkie wierzchołki tego grafu mają ten sam stopień. Wtedy $\delta(G) = \Delta(G)$. Jeśli $\delta(G) = \Delta(G) = r$, to mówimy o grafie r-regularnym.

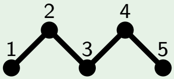
Ważne klasy grafów

- graf pełny rzędu n - K_n
  $K_n = \left(V, \binom{V}{2}\right)$ - zbiór krawędzi grafu pełnego to zbiór **wszystkich** podzbiorów dwuelementowych zbioru V
- ścieżka rzędu n - P_n
  Graf, którego wierzchołki da się ustawić w ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, taki że zbiór krawędzi to
  $E(P_n) = \{x_i x_{i+1} \colon i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\}$
- cykl rzędu n - C_n
  Graf, którego wierzchołki da się ustawić w ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, taki że zbiór krawędzi to
  $E(C_n) = \{x_i x_{i+1} \colon i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\} \cup \{x_1 x_n\}$

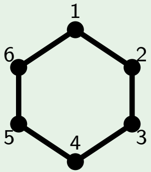
Przykład



graf pełny K_4



ścieżka P_5



cykl C_6

Definicja

Graf prosty $G = (V, E)$ nazywamy dwudzielnym, jeśli zbiór wierzchołków tego grafu da się podzielić na zbiory X i Y, takie że $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$ oraz każda krawędź ma dokładnie jeden wierzchołek w zbiorze X i jeden wierzchołek w zbiorze Y.

$xy \in E \Rightarrow x \in X \wedge y \in Y$

Oznaczenie: $G = (X, Y; E)$

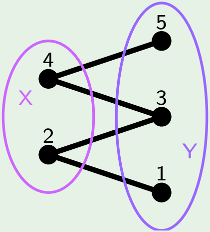
Definicja

Graf prosty $G = (V, E)$ nazywamy dwudzielnym, jeśli zbiór wierzchołków tego grafu da się podzielić na zbiory X i Y, takie że $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$ oraz każda krawędź ma dokładnie jeden wierzchołek w zbiorze X i jeden wierzchołek w zbiorze Y.
$xy \in E \Rightarrow x \in X \wedge y \in Y$
Oznaczenie: $G = (X, Y; E)$

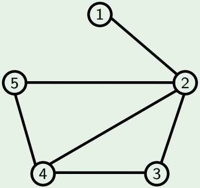
Definicja

Dopełnieniem grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf o tym samym zbiorze wierzchołków V oraz zbiorze krawędzi będącym dopełnieniem zbioru E do zbioru krawędzi grafu pełnego.
Oznaczenie: $\overline{G} := \left(V, \binom{V}{2} \setminus E\right)$

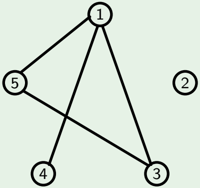
Przykład



graf dwudzielny



graf G



i jego dopełnienie

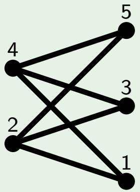
Ważne klasy grafów c.d.

- graf dwudzielny pełny - $K_{p,q}$
  Graf dwudzielny, gdzie $|X| = p$, $|Y| = q$, którego zbiór krawędzi jest zbiorem **wszystkich możliwych** podzbiorów dwuelementowych zbioru V,
  tj. $E(K_{p,q}) = \{xy\colon x \in X \wedge y \in Y\}$

Ważne klasy grafów c.d.

- graf dwudzielny pełny - $K_{p,q}$
  Graf dwudzielny, gdzie $|X| = p$, $|Y| = q$, którego zbiór krawędzi jest zbiorem **wszystkich możliwych** podzbiorów dwuelementowych zbioru V,
  tj. $E(K_{p,q}) = \{xy : x \in X \wedge y \in Y\}$

Przykład



graf dwudzielny pełny $K_{2,3}$

Izomorfizm grafów

Definicja

Izomorfizmem grafów $G = (V, E)$ oraz $H = (W, F)$ nazywamy bijekcję $f : V \to W$, taką że $\forall x, y \in V : (xy \in E \Leftrightarrow f(x)f(y) \in F)$.

Czyli dla dowolnych dwóch wierzchołków grafu G tworzą one krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy ich obrazy $f(x)$ i $f(y)$ tworzą krawędź w grafie H.

Izomorfizm grafów

Definicja

Izomorfizmem grafów $G = (V, E)$ oraz $H = (W, F)$ nazywamy bijekcję $f\colon V \to W$, taką że $\forall x, y \in V : (xy \in E \Leftrightarrow f(x)f(y) \in F)$.

Czyli dla dowolnych dwóch wierzchołków grafu G tworzą one krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy ich obrazy $f(x)$ i $f(y)$ tworzą krawędź w grafie H.

Mówimy, że grafy G oraz H są izomorficzne, jeśli istnieje izomorfizm grafów G i H.

Izomorfizm grafów

Definicja

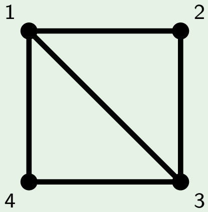
Izomorfizmem grafów $G = (V, E)$ oraz $H = (W, F)$ nazywamy bijekcję $f: V \to W$, taką że $\forall x, y \in V: (xy \in E \Leftrightarrow f(x)f(y) \in F)$.

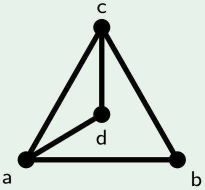
Czyli dla dowolnych dwóch wierzchołków grafu G tworzą one krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy ich obrazy $f(x)$ i $f(y)$ tworzą krawędź w grafie H.

Mówimy, że grafy G oraz H są izomorficzne, jeśli istnieje izomorfizm grafów G i H.

Mówiąc potocznie: dwa grafy są izomorficzne, jeśli da się je narysować w ten sam sposób. Lub jeśli można otrzymać jeden z nich poprzez przesuwanie wierzchołków drugiego (krawędzie są przesuwane razem z wierzchołkami).

Przykład





graf $G = (V, E)$
$V = \{1, 2, 3, 4\}$
$E = \{12, 23, 34, 14, 13\}$

graf $H = (W, F)$
$W = \{a, b, c, d\}$
$F = \{ab, bc, cd, ac, ad\}$

Izomorfizm: $f : V \to W$ jest następujący:
$f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c, f(4) = d$

Wprost z definicji izomorfizmu wynika, że jeśli grafy są izomorficzne, to mają tyle samo wierzchołków (bo f jest bijekcją).

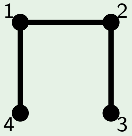
Stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe!

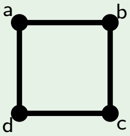
Wprost z definicji izomorfizmu wynika, że jeśli grafy są izomorficzne, to mają tyle samo wierzchołków (bo f jest bijekcją).

Stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe!

Przykład

graf G





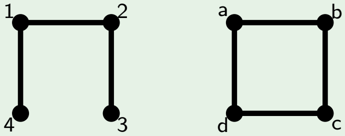
graf H

Wprost z definicji izomorfizmu wynika, że jeśli grafy są izomorficzne, to mają tyle samo wierzchołków (bo f jest bijekcją).

Stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe!

Przykład

graf G



graf H

Nie istnieje izomorfizm tych grafów. Próbując go stworzyć (wskazać funkcję f jak w definicji), wierzchołkowi 4 musimy przypisać jeden z wierzchołków grafu H. Załóżmy, że $f(4) = d$ (pozostałe przypadki są analogiczne). Ponieważ 14 jest krawędzią grafu G, to $f(1) \in \{a, c\}$, BSO $f(1) = a$. Ale wtedy funkcja f musi przypisywać 2 lub 3 do c. Pojawia się problem!
$34 \notin E(G)$ i $24 \notin E(G)$ ALE $cd \in E(H)$

Co więcej, jeśli grafy są izomorficzne, to mają tyle samo krawędzi (bo $\forall x, y \in V\colon (xy \in E \Leftrightarrow f(x)f(y) \in F)$).

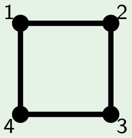
Ale jeśli dwa grafy mają tyle samo wierzchołków i tyle samo krawędzi, to nie oznacza, że są izomorficzne.

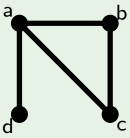
Co więcej, jeśli grafy są izomorficzne, to mają tyle samo krawędzi (bo $\forall x, y \in V\colon (xy \in E \Leftrightarrow f(x)f(y) \in F)$).

Ale jeśli dwa grafy mają tyle samo wierzchołków i tyle samo krawędzi, to nie oznacza, że są izomorficzne.

Przykład

graf G





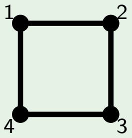
graf H

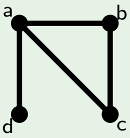
Co więcej, jeśli grafy są izomorficzne, to mają tyle samo krawędzi (bo $\forall x, y \in V\colon (xy \in E \Leftrightarrow f(x)f(y) \in F)$).

Ale jeśli dwa grafy mają tyle samo wierzchołków i tyle samo krawędzi, to nie oznacza, że są izomorficzne.

Przykład

graf G





graf H

Któryś z wierzchołków grafu G musi przejść w wierzchołek a. BSO $f(1) = a$. Niezależnie od tego jak przypiszemy pozostałe wierzchołki, pojawi się problem! W grafie G nie ma krawędzi 13, a w grafie H są wszystkie możliwe krawędzie zawierające wierzchołek a. Np. jeśli $f(3) = c$, to $13 \notin E(G)$ ALE $ac \in E(H)$.

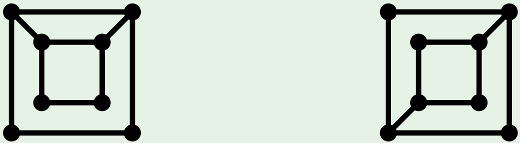
W obu przypadkach problem wynikał z tego, że stopnie wierzchołków, które chcemy do siebie przypisać nie są takie same. Stąd wnioskujemy, że jeśli grafy są izomorficzne, to mają takie same stopnie wierzchołków.

To jednak wciąż nie wystarcza! Poniżej przykład grafów, które mają tyle samo wierzchołków, krawędzi i takie same stopnie wierzchołków, ale **nie są izomorficzne**.

W obu przypadkach problem wynikał z tego, że stopnie wierzchołków, które chcemy do siebie przypisać nie są takie same. Stąd wnioskujemy, że jeśli grafy są izomorficzne, to mają takie same stopnie wierzchołków.

To jednak wciąż nie wystarcza! Poniżej przykład grafów, które mają tyle samo wierzchołków, krawędzi i takie same stopnie wierzchołków, ale **nie są izomorficzne**.

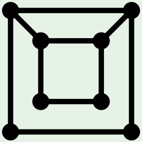
Przykład

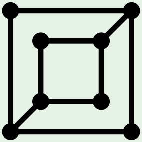


W obu przypadkach problem wynikał z tego, że stopnie wierzchołków, które chcemy do siebie przypisać nie są takie same. Stąd wnioskujemy, że jeśli grafy są izomorficzne, to mają takie same stopnie wierzchołków.

To jednak wciąż nie wystarcza! Poniżej przykład grafów, które mają tyle samo wierzchołków, krawędzi i takie same stopnie wierzchołków, ale **nie są izomorficzne**.

Przykład





Grafy te nie są izomorficzne, bo w tym po lewej każdy wierzchołek stopnia 2 ma sąsiada stopnia 2, natomiast w grafie po prawej żaden wierzchołek stopnia 2 nie ma sąsiada stopnia 2. (Próbując stworzyć funkcję f, szybko pojawi się problem)

Definicja

Graf $H = (W, F)$ nazywamy podgrafem grafu $G = (V, E)$, jeśli W jest podzbiorem zbioru V oraz F jest podzbiorem zbioru E.
Oznaczenie: $H \subset G$

Definicja

Graf $H = (W, F)$ nazywamy podgrafem grafu $G = (V, E)$, jeśli W jest podzbiorem zbioru V oraz F jest podzbiorem zbioru E.
Oznaczenie: $H \subset G$

Definicja

Podgrafem indukowanym przez zbiór wierzchołków $S \subset V$ nazywamy graf $H = (S, F)$, gdzie $F = \{xy \in E \colon x \in S \wedge y \in S\}$.
Oznaczenie: $H = G[S]$

Definicja

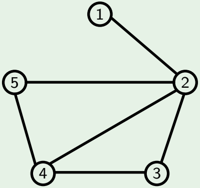
Graf $H = (W, F)$ nazywamy podgrafem grafu $G = (V, E)$, jeśli W jest podzbiorem zbioru V oraz F jest podzbiorem zbioru E.
Oznaczenie: $H \subset G$

Definicja

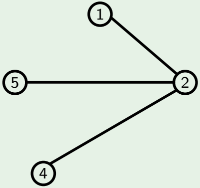
Podgrafem indukowanym przez zbiór wierzchołków $S \subset V$ nazywamy graf $H = (S, F)$, gdzie $F = \{xy \in E \colon x \in S \wedge y \in S\}$.
Oznaczenie: $H = G[S]$

Zbiór krawędzi podgrafu indukowanego przez zbiór wierzchołków S tworzymy biorąc *wszystkie* krawędzie grafu G *utworzone przez pary wierzchołków ze zbioru* S.

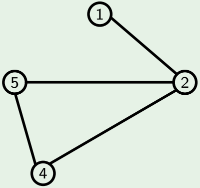
Przykład



graf G



podgraf grafu G



podgraf indukowany grafu G

Reprezentacja grafu w komputerze

Definicja

Macierzą sąsiedztwa grafu $G = (V, E)$, gdzie $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ nazywamy macierz kwadratową $A(G) = [a_{ij}] \in M_{n \times n}$, taką że

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in E(G) \\ 0, & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Reprezentacja grafu w komputerze

Definicja

Macierzą sąsiedztwa grafu $G = (V, E)$, gdzie $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ nazywamy macierz kwadratową $A(G) = [a_{ij}] \in M_{n \times n}$, taką że

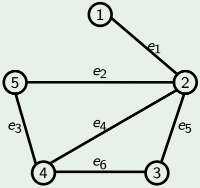
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in E(G) \\ 0, & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Definicja

Macierzą incydencji grafu $G = (V, E)$, gdzie $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ oraz $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ nazywamy macierz $B(G) = [b_{ij}] \in M_{n \times m}$, taką że

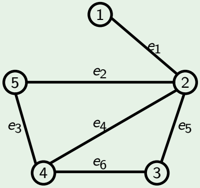
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \in e_j \\ 0, & v_i \notin e_j \end{cases}$$

Przykład



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład



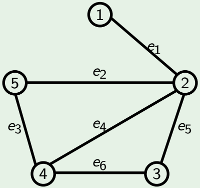
$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uwagi:
Macierz sąsiedztwa jest macierzą symetryczną.
Stopień wierzchołka w grafie znajdujemy poprzez zsumowanie jedynek w odpowiednim wierszu dowolnej z podanych macierzy.
W macierzy incydencji są dokładnie dwie jedynki w każdej kolumnie.

Graf można reprezentować w komputerze również za pomocą listy sąsiedztwa. Każdemu wierzchołkowi w grafie przyporządkowuje ona listę jego sąsiadów. Najczęściej sąsiedzi ci występują na liście sąsiedztwa w kolejności rosnącej.

Graf można reprezentować w komputerze również za pomocą listy sąsiedztwa. Każdemu wierzchołkowi w grafie przyporządkowuje ona listę jego sąsiadów. Najczęściej sąsiedzi ci występują na liście sąsiedztwa w kolejności rosnącej.

Przykład



$$
\begin{array}{ccl}
1 & \to & 2 \\
2 & \to & 1, 3, 4, 5 \\
3 & \to & 2, 4 \\
4 & \to & 2, 3, 5 \\
5 & \to & 2, 4
\end{array}
$$