Teoria grafów - grafy planarne

Aleksandra Gorzkowska

Elektronika i Telekomunikacja
Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji

Grafy planarne

Definicja

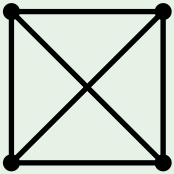
Graf G nazywamy planarnym, jeśli da się go narysować na płaszczyźnie, tak aby żadne dwie krawędzie nie miały punktów wspólnych poza wierzchołkami.

Grafy planarne

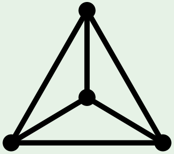
Definicja

Graf G nazywamy planarnym, jeśli da się go narysować na płaszczyźnie, tak aby żadne dwie krawędzie nie miały punktów wspólnych poza wierzchołkami.

Przykład



graf pełny K_4



płaski rysunek grafu K_4

Twierdzenie (Whitney)

Każdy graf da się narysować bez przecięć w $\mathbb{R}^3$.

Twierdzenie (Whitney)

Każdy graf da się narysować bez przecięć w $\mathbb{R}^3$.

Twierdzenie

Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy da się narysować bez przecięć na sferze.

Definicja

Graficzną reprezentację (rysunek) bez przecięć krawędzi grafu planarnego na płaszczyźnie nazywamy grafem płaskim.

Definicja

Graficzną reprezentację (rysunek) bez przecięć krawędzi grafu planarnego na płaszczyźnie nazywamy grafem płaskim.

Przykład

Grafami planarnymi są:

- drzewa,
- cykle.

Grafami planarnymi NIE są:

- graf K_5 i większe grafy pełne,
- graf $K_{3,3}$ i większe grafy dwudzielne pełne.

Definicja

Krawędzie grafu płaskiego dzielą płaszczyznę na spójne obszary, które nazywamy ścianami grafu płaskiego (grafu planarnego).

Definicja

Krawędzie grafu płaskiego dzielą płaszczyznę na spójne obszary, które nazywamy **ścianami** grafu płaskiego (grafu planarnego).

Definicja

Stopniem ściany nazywamy liczbę krawędzi w najkrótszej drodze zamkniętej stanowiącej brzeg tej ściany.

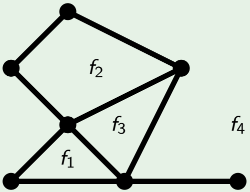
Definicja

Krawędzie grafu płaskiego dzielą płaszczyznę na spójne obszary, które nazywamy ścianami grafu płaskiego (grafu planarnego).

Definicja

Stopniem ściany nazywamy liczbę krawędzi w najkrótszej drodze zamkniętej stanowiącej brzeg tej ściany.

Przykład



Stopnie ścian:
$\deg(f_1) = 3$
$\deg(f_2) = 4$
$\deg(f_3) = 3$
$\deg(f_4) = 8$

Twierdzenie (Analogiczne do lematu o uściskach dłoni)

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem płaskim o zbiorze ścian F, to

$$\sum_{f \in F} \deg(f) = 2|E|.$$

Twierdzenie (Analogiczne do lematu o uściskach dłoni)

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem płaskim o zbiorze ścian F, to

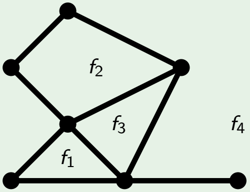
$$\sum_{f \in F} \deg(f) = 2|E|.$$

Twierdzenie (wzór Eulera)

Jeśli $G = (V, E)$ jest spójnym grafem płaskim o zbiorze ścian F, to

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

Przykład



$\deg(f_1) = 3, \deg(f_2) = 4,$
$\deg(f_3) = 3, \deg(f_4) = 8$

$|V| = 7, |E| = 9, |F| = 4$

$3 + 3 + 4 + 8 = 18 = 2 \cdot 9$

$7 - 9 + 4 = 2$

Wniosek

Każda reprezentacja płaska grafu planarnego ma tyle samo ścian.

Wniosek

Każda reprezentacja płaska grafu planarnego ma tyle samo ścian.

Wniosek

Jeśli $G = (V, E)$ *jest spójnym grafem planarnym, to* $|E| \leq 3|V| - 6$.

Wniosek

Każda reprezentacja płaska grafu planarnego ma tyle samo ścian.

Wniosek

Jeśli $G = (V, E)$ *jest spójnym grafem planarnym, to* $|E| \leq 3|V| - 6$.

Dowód.

Niech $f_1, f_2, \cdots, f_k$ będą ścianami grafu G

Z ADLOUD: $2|E| = \sum_{i=1}^{k} \deg(f_i) \geq 3k$

Ze wzoru Eulera: $|V| - |E| + k = 2 \Rightarrow k = 2 - |V| + |E|$

$3(2 - |V| + |E|) \leq 2|E|$
$|E| \leq 3|V| - 6$ $\square$

Wniosek

Graf K_5 nie jest planarny.

Wniosek

Graf K_5 nie jest planarny.

$|K_5| = 5, ||K_5|| = 10$

$||K_5|| \leq 3|K_5| - 6$

$10 \leq 9$ - sprzeczność!

Wniosek

Graf K_5 nie jest planarny.

$|K_5| = 5, ||K_5|| = 10$
$||K_5|| \leq 3|K_5| - 6$
$10 \leq 9$ - sprzeczność!

Czy to samo da się pokazać dla $K_{3,3}$?

Wniosek

Graf K_5 nie jest planarny.

$|K_5| = 5, ||K_5|| = 10$

$||K_5|| \leq 3|K_5| - 6$

$10 \leq 9$ - sprzeczność!

Czy to samo da się pokazać dla $K_{3,3}$?

$|K_{3,3}| = 6, ||K_{3,3}|| = 9$

$9 \leq 12$

Wniosek

Graf K_5 nie jest planarny.

$|K_5| = 5, ||K_5|| = 10$

$||K_5|| \leq 3|K_5| - 6$

$10 \leq 9$ - sprzeczność!

Czy to samo da się pokazać dla $K_{3,3}$?

$|K_{3,3}| = 6, ||K_{3,3}|| = 9$

$9 \leq 12$

Wniosek

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem planarnym, to $\delta(G) \leq 5$.

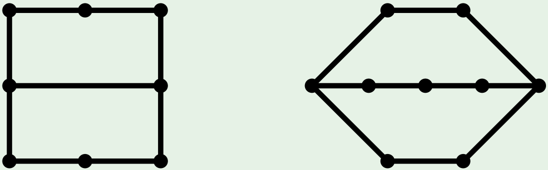
Definicja

Grafy G_1 oraz G_2 nazywamy homeomorficznymi, jeśli da się je otrzymać z tego samego grafu G poprzez zastąpienie niektórych krawędzi ścieżkami.

Definicja

Grafy G_1 oraz G_2 nazywamy homeomorficznymi, jeśli da się je otrzymać z tego samego grafu G poprzez zastąpienie niektórych krawędzi ścieżkami.

Przykład



Twierdzenie (Kuratowski)

Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z K_5 *ani* $K_{3,3}$.

Definicja

Bryłą platońską nazywamy wielościan, którego ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i stopień każdego wierzchołka jest taki sam.

Definicja

Bryłą platońską nazywamy wielościan, którego ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i stopień każdego wierzchołka jest taki sam.

Definicja

Grafem platońskim nazywamy graf, który jest reprezentacją bryły platońskiej.

Definicja

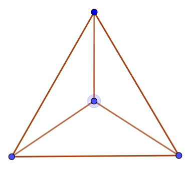
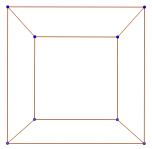
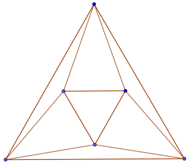
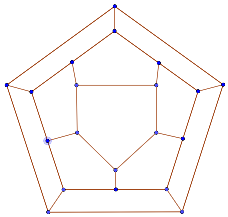
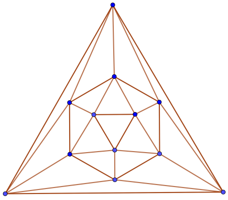
Bryłą platońską nazywamy wielościan, którego ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i stopień każdego wierzchołka jest taki sam.

Definicja

Grafem platońskim nazywamy graf, który jest reprezentacją bryły platońskiej.

Uwaga: grafy platońskie są planarne.

Przykład

Definicja

Grubością grafu G nazywamy najmniejszą liczbę grafów planarnych, na które można rozłożyć zbiór krawędzi grafu G.

Definicja

Grubością grafu G nazywamy najmniejszą liczbę grafów planarnych, na które można rozłożyć zbiór krawędzi grafu G.

Uwaga: Graf planarny ma grubość 1.

Definicja

Grubością grafu G nazywamy najmniejszą liczbę grafów planarnych, na które można rozłożyć zbiór krawędzi grafu G.

Uwaga: Graf planarny ma grubość 1.

Grubość grafu pełnego K_n to: $\begin{matrix} \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor & \text{dla } n \geq 5 \\ 3 & \text{dla } n = 9, 10. \end{matrix}$

Zastosowania

Chcemy umieścić obwód elektroniczny na płytce tak aby połączenia się nie krzyżowały. Jeśli ten układ jest reprezentowany przez graf planarny, to możemy to zrobić. Jeśli nie jest to graf planarny, to umieszczamy połączenia (krawędzie) na jak najmniejszej liczbie warstw płytki. Grubość grafu to liczba warstw, których musimy użyć.

Problem po raz pierwszy był rozpatrywany przez Ringla w 1959. Rozpatrywał on mapę państw na Ziemi i Księżycu (każde państwo ma kolonię na Księżycu, ale ich układ nie odpowiada temu na Ziemi). Każde państwo reprezentujemy za pomocą punktu. Punkty łączymy, jeśli odpowiadające im państwa ze sobą sąsiadują. To samo robimy na Księżycu. Mapa na Ziemi tworzy graf planarny. Podobnie jak na Księżycu.

Ilu kolorów potrzebujemy do pokolorowania takiej mapy, tak aby sąsiadujące ze sobą państwa (na Ziemi lub na Księżycu) miały rożne kolory?

Problem nadal nie jest rozwiązany. Wiadomo, że istnieją mapy, które potrzebują 9 kolorów i każdą mapę da się pokolorować 12 kolorami.

Problem po raz pierwszy był rozpatrywany przez Ringla w 1959. Rozpatrywał on mapę państw na Ziemi i Księżycu (każde państwo ma kolonię na Księżycu, ale ich układ nie odpowiada temu na Ziemi). Każde państwo reprezentujemy za pomocą punktu. Punkty łączymy, jeśli odpowiadające im państwa ze sobą sąsiadują. To samo robimy na Księżycu. Mapa na Ziemi tworzy graf planarny. Podobnie jak na Księżycu.

Ilu kolorów potrzebujemy do pokolorowania takiej mapy, tak aby sąsiadujące ze sobą państwa (na Ziemi lub na Księżycu) miały rożne kolory?

Problem nadal nie jest rozwiązany. Wiadomo, że istnieją mapy, które potrzebują 9 kolorów i każdą mapę da się pokolorować 12 kolorami. Problem ten można sformułować na grafach: ilu kolorów potrzebujemy do pokolorowania wierzchołków grafu dwuplanarnego, tak aby sąsiednie wierzchołki miały różne kolory?