Teoria grafów - kolorowania

Aleksandra Gorzkowska

Elektronika i Telekomunikacja
Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji

Kolorowania wierzchołków

Definicja

Kolorowaniem wierzchołkowym grafu $G = (V, E)$ nazywamy dowolną funkcję $f\colon V \to C$, gdzie C jest zbiorem kolorów.

Kolorowania wierzchołków

Definicja

Kolorowaniem wierzchołkowym grafu $G = (V, E)$ nazywamy dowolną funkcję $f: V \to C$, gdzie C jest zbiorem kolorów.

Definicja

Kolorowanie wierzchołkowe nazywamy **właściwym**, jeśli dwa sąsiednie wierzchołki grafu mają różne kolory.

Kolorowania wierzchołków

Definicja

Kolorowaniem wierzchołkowym grafu $G = (V, E)$ nazywamy dowolną funkcję $f\colon V \to C$, gdzie C jest zbiorem kolorów.

Definicja

Kolorowanie wierzchołkowe nazywamy właściwym, jeśli dwa sąsiednie wierzchołki grafu mają różne kolory.

Definicja

Graf G jest k-kolorowalny, jeśli istnieje wierzchołkowe kolorowanie właściwe za pomocą dokładnie k kolorów.

Kolorowania wierzchołków

Definicja

Liczbą chromatyczną grafu G nazywamy najmniejszą liczbę k, dla której graf G jest k-kolorowalny.

Oznaczenie: $\chi(G)$

Kolorowania wierzchołków

Definicja

Liczbą chromatyczną grafu G nazywamy najmniejszą liczbę k, dla której graf G jest k-kolorowalny.

Oznaczenie: $\chi(G)$

Przykład

- $\chi(K_n) = n$,
- $\chi(G) = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy G - dwudzielny,
- $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ parzyste} \\ 3, & n \text{ nieparzyste} \end{cases}$

Kolorowania wierzchołków

Przykład

Kolorowania wierzchołków

Algorytm kolorowania

Kolorowania wierzchołków

Twierdzenie (Brooks)

Jeśli graf G jest różny of grafu pełnego K_n i cyklu nieparzystego C_{2k+1}, to

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Kolorowania wierzchołków

Twierdzenie (Brooks)

Jeśli graf G jest różny of grafu pełnego K_n i cyklu nieparzystego C_{2k+1}, to

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Twierdzenie (O czterech barwach)

Dla każdego grafu planarnego G zachodzi $\chi(G) \leq 4$.

Kolorowania krawędzi

Definicja

Kolorowaniem krawędziowym grafu $G = (V, E)$ nazywamy dowolną funkcję $f : E \to C$, gdzie C jest zbiorem kolorów.

Kolorowania krawędzi

Definicja

Kolorowaniem krawędziowym grafu $G = (V, E)$ nazywamy dowolną funkcję $f : E \to C$, gdzie C jest zbiorem kolorów.

Definicja

Kolorowanie krawędziowe nazywamy właściwym, jeśli dwie sąsiednie krawędzie grafu mają różne kolory.

Kolorowania krawędzi

Definicja

Kolorowaniem krawędziowym grafu $G = (V, E)$ nazywamy dowolną funkcję $f : E \to C$, gdzie C jest zbiorem kolorów.

Definicja

Kolorowanie krawędziowe nazywamy właściwym, jeśli dwie sąsiednie krawędzie grafu mają różne kolory.

Definicja

Graf G jest k-kolorowalny krawędziowo, jeśli istnieje krawędziowe kolorowanie właściwe za pomocą dokładnie k kolorów.

Kolorowania krawędzi

Definicja

Indeksem chromatycznym grafu G nazywamy najmniejszą liczbę k, dla której graf G jest k-kolorowalny krawędziowo.

Oznaczenie: $\chi'(G)$

Kolorowania krawędzi

Definicja

Indeksem chromatycznym grafu G nazywamy najmniejszą liczbę k, dla której graf G jest k-kolorowalny krawędziowo.

Oznaczenie: $\chi'(G)$

Przykład

- $\chi'(K_{1,n}) = n$,
- $\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1, & n \text{ parzyste} \\ n, & n \text{ nieparzyste} \end{cases}$

Kolorowania krawędzi

Przykład

Twierdzenie (Vizing)

Dla każdego grafu G zachodzi

$$\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G) + 1\}.$$

Kolorowania krawędzi

Twierdzenie (Vizing)

Dla każdego grafu G zachodzi

$$\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G) + 1\}.$$

Jeśli graf G ma $\chi'(G) = \Delta(G)$, to mówimy, że jest klasy 1.
Jeśli graf G ma $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, to mówimy, że jest klasy 2.

Kolorowania krawędzi

Twierdzenie (Vizing)

Dla każdego grafu G zachodzi

$$\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G) + 1\}.$$

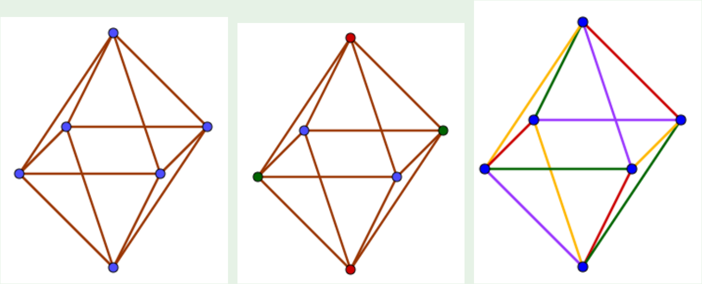
Jeśli graf G ma $\chi'(G) = \Delta(G)$, to mówimy, że jest klasy 1.
Jeśli graf G ma $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, to mówimy, że jest klasy 2.

Twierdzenie (Kőnig)

Każdy graf dwudzielny jest klasy 1.

Przykład

Graf ośmiościanu i jego wierzchołkowe i krawędziowe kolorowanie właściwe.



Zastosowania

Przykład