Algorytm Forda-Fulkersona

Aleksandra Gorzkowska

Elektronika i Telekomunikacja
Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji

Definicja

Siecią nazywamy parę (D, c), gdzie $D = (V, A)$ to digraf, $c\colon A \to [0; \infty)$. Funkcję c nazywamy funkcją wagową.

Definicja

Siecią nazywamy parę (D, c), gdzie $D = (V, A)$ to digraf, $c\colon A \to [0; \infty)$. Funkcję c nazywamy **funkcją wagową**.

W sieci $N = (V, A, c)$ funkcję c będziemy nazywać **przepustowością**.

Definicja

Siecią nazywamy parę (D, c), gdzie $D = (V, A)$ to digraf, $c\colon A \to [0; \infty)$. Funkcję c nazywamy funkcją wagową.

W sieci $N = (V, A, c)$ funkcję c będziemy nazywać przepustowością. Wyróżniamy dwa wierzchołki s-źródło oraz t-ujście.

Definicja

Przepływem z s do t w sieci N nazywamy funkcję $f : A \to [0; \infty)$, taką że:

1. $\forall xy \in A \; f(xy) \leq c(xy)$,
2. $\forall x \in V \backslash \{s, t\} : \sum_{y \in N^+(x)} f(xy) = \sum_{z \in N^-(x)} f(zx)$

Definicja

Przepływem z s do t w sieci N nazywamy funkcję $f : A \to [0; \infty)$, taką że:

1. $\forall xy \in A \; f(xy) \leq c(xy)$,
2. $\forall x \in V \setminus \{s, t\} : \sum_{y \in N^+(x)} f(xy) = \sum_{z \in N^-(x)} f(zx)$

Funkcję $w(f) = \sum_{y \in N^+(s)} f(sy) - \sum_{z \in N^-(s)} f(zs)$ nazywamy wartością przepływu.

Definicja

Przepływem z s do t w sieci N nazywamy funkcję $f : A \to [0; \infty)$, taką że:

1. $\forall xy \in A\ f(xy) \le c(xy)$,
2. $\forall x \in V \setminus \{s, t\} : \sum_{y \in N^+(x)} f(xy) = \sum_{z \in N^-(x)} f(zx)$

Funkcję $w(f) = \sum_{y \in N^+(s)} f(sy) - \sum_{z \in N^-(s)} f(zs)$ nazywamy wartością przepływu.

Przepływ nazywamy maksymalnym, jeśli ma największą możliwą wartość.

Definicja

Przepływem z s do t w sieci N nazywamy funkcję $f : A \to [0; \infty)$, taką że:

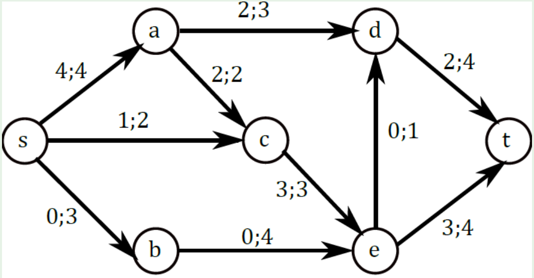
1. $\forall xy \in A \; f(xy) \leq c(xy)$,
2. $\forall x \in V \setminus \{s, t\} : \sum_{y \in N^+(x)} f(xy) = \sum_{z \in N^-(x)} f(zx)$

Funkcję $w(f) = \sum_{y \in N^+(s)} f(sy) - \sum_{z \in N^-(s)} f(zs)$ nazywamy wartością przepływu.

Przepływ nazywamy maksymalnym, jeśli ma największą możliwą wartość.

Jaki jest przepływ maksymalny w danej sieci?

Przykład



Definicja

Przekrojem oddzielającym s od t w sieci N nazywamy zbiór łuków $A(S, T) := \{xy \in A\colon x \in S, y \in T\}$, gdzie $V = S \cup T$, $S \cap T = \emptyset$, $s \in S$, $t \in T$.

Definicja

Przekrojem oddzielającym s od t w sieci N nazywamy zbiór łuków $A(S,T) := \{xy \in A\colon x \in S, y \in T\}$, gdzie $V = S \cup T$, $S \cap T = \emptyset$, $s \in S$, $t \in T$.

Liczbę $c(S,T) := \sum_{xy \in A(S,T)} c(xy)$ nazywamy przepustowością przekroju.

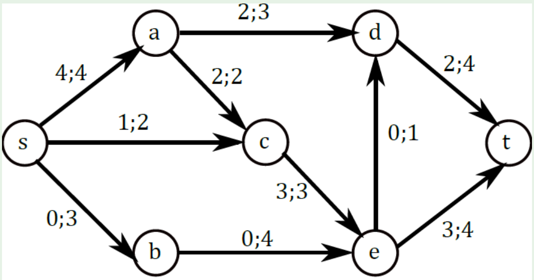
Definicja

Przekrojem oddzielającym s od t w sieci N nazywamy zbiór łuków $A(S,T) := \{xy \in A \colon x \in S, y \in T\}$, gdzie $V = S \cup T$, $S \cap T = \emptyset$, $s \in S$, $t \in T$.

Liczbę $c(S,T) := \sum_{xy \in A(S,T)} c(xy)$ nazywamy przepustowością przekroju.

Przekrój nazywamy minimalnym, jeśli ma najmniejszą możliwą przepustowość.

Przykład



Twierdzenie

W sieci $N = (V, A, c)$ *o źródle* s *i ujściu* t *dla dowolnego przepływu* f *oraz dowolnego przekroju* $A(S, T)$ *zachodzi nierówność* $w(f) \leq c(S, T)$.

Twierdzenie

W sieci $N = (V, A, c)$ o źródle s i ujściu t dla dowolnego przepływu f oraz dowolnego przekroju $A(S, T)$ zachodzi nierówność $w(f) \leq c(S, T)$.

Uwaga! Dla każdego przepływu f oraz przekroju $A(S, T)$ zachodzi

$$w(f) = \sum_{x \in S, y \in T} f(xy) - \sum_{x \in S, z \in T} f(zx)$$

Twierdzenie

W sieci $N = (V, A, c)$ o źródle s i ujściu t dla dowolnego przepływu f oraz dowolnego przekroju $A(S, T)$ zachodzi nierówność $w(f) \leq c(S, T)$.

Uwaga! Dla każdego przepływu f oraz przekroju $A(S, T)$ zachodzi

$$w(f) = \sum_{x \in S, y \in T} f(xy) - \sum_{x \in S, z \in T} f(zx)$$

Wniosek

Dla każdego przepływu f zachodzi

$$w(f) = \sum_{z \in N^-(t)} f(zt) - \sum_{y \in N^+(t)} f(tx)$$

Twierdzenie (Ford, Fulkerson, 1956)

Wartość maksymalnego przepływu ze źródła s *do ujścia* t *w sieci jest równa przepustowości minimalnego przekroju oddzielającego* s *od* t*.*

Twierdzenie (Ford, Fulkerson, 1956)

Wartość maksymalnego przepływu ze źródła s do ujścia t w sieci jest równa przepustowości minimalnego przekroju oddzielającego s od t.

$$\max\{w(f)\colon f-\text{maksymalny}\} = \min\{c(S,T)\colon A(S,T)-\text{minimalny}\}$$

Algorytm Forda-Fulkersona

Wejście: Sieć $N = (V, A, c)$ oraz przepływ początkowy f
Wyjście: przepływ maksymalny, przekrój minimalny

Algorytm Forda-Fulkersona

Wejście: Sieć $N = (V, A, c)$ oraz przepływ początkowy f
Wyjście: przepływ maksymalny, przekrój minimalny

1. Wierzchołkowi s nadaj cechę $(-, \infty)$

Algorytm Forda-Fulkersona

Wejście: Sieć $N = (V, A, c)$ oraz przepływ początkowy f
Wyjście: przepływ maksymalny, przekrój minimalny

1. Wierzchołkowi s nadaj cechę $(-, \infty)$
2. Jeśli x ocechowany $(z^{\pm}, \epsilon(x))$, ale nie sprawdzony dla wszystkich nieocechowanych y sąsiadów x:

Algorytm Forda-Fulkersona

Wejście: Sieć $N = (V, A, c)$ oraz przepływ początkowy f
Wyjście: przepływ maksymalny, przekrój minimalny

1. Wierzchołkowi s nadaj cechę $(-, \infty)$
2. Jeśli x ocechowany $(z^{\pm}, \epsilon(x))$, ale nie sprawdzony dla wszystkich nieocechowanych y sąsiadów x:
    - jeśli $y \in N^+(x)$, $f(xy) < c(xy)$, to nadaj y cechę $(x^+, \epsilon(y) = \min\{\epsilon(x), c(xy) - f(xy)\})$

Algorytm Forda-Fulkersona

Wejście: Sieć $N = (V, A, c)$ oraz przepływ początkowy f
Wyjście: przepływ maksymalny, przekrój minimalny

1. Wierzchołkowi s nadaj cechę $(-, \infty)$
2. Jeśli x ocechowany $(z^{\pm}, \epsilon(x))$, ale nie sprawdzony dla wszystkich nieocechowanych y sąsiadów x:
   - jeśli $y \in N^{+}(x)$, $f(xy) < c(xy)$, to nadaj y cechę $(x^{+}, \epsilon(y) = \min\{\epsilon(x), c(xy) - f(xy)\})$
   - jeśli $y \in N^{-}(x)$, $f(yx) > 0$, to nadaj y cechę $(x^{-}, \epsilon(y) = \min\{\epsilon(x), f(yx)\})$

Algorytm Forda-Fulkersona

Wejście: Sieć $N = (V, A, c)$ oraz przepływ początkowy f
Wyjście: przepływ maksymalny, przekrój minimalny

1. Wierzchołkowi s nadaj cechę $(-, \infty)$
2. Jeśli x ocechowany $(z^{\pm}, \epsilon(x))$, ale nie sprawdzony dla wszystkich nieocechowanych y sąsiadów x:
   - jeśli $y \in N^+(x)$, $f(xy) < c(xy)$, to nadaj y cechę $(x^+, \epsilon(y) = \min\{\epsilon(x), c(xy) - f(xy)\})$
   - jeśli $y \in N^-(x)$, $f(yx) > 0$, to nadaj y cechę $(x^-, \epsilon(y) = \min\{\epsilon(x), f(yx)\})$
3. Jeśli:
   - ujście ocechowane, idź do 4.
   - ujście nieocechowane i istnieje ocechowany, nie sprawdzony wierzchołek, to idź do 2

Algorytm Forda-Fulkersona

Wejście: Sieć $N = (V, A, c)$ oraz przepływ początkowy f
Wyjście: przepływ maksymalny, przekrój minimalny

1. Wierzchołkowi s nadaj cechę $(-, \infty)$
2. Jeśli x ocechowany $(z^{\pm}, \epsilon(x))$, ale nie sprawdzony dla wszystkich nieocechowanych y sąsiadów x:
   - jeśli $y \in N^{+}(x)$, $f(xy) < c(xy)$, to nadaj y cechę $(x^{+}, \epsilon(y) = \min\{\epsilon(x), c(xy) - f(xy)\})$
   - jeśli $y \in N^{-}(x)$, $f(yx) > 0$, to nadaj y cechę $(x^{-}, \epsilon(y) = \min\{\epsilon(x), f(yx)\})$
3. Jeśli:
   - ujście ocechowane, idź do 4.
   - ujście nieocechowane i istnieje ocechowany, nie sprawdzony wierzchołek, to idź do 2
   - nie można nadać więcej cech, to KONIEC

4. Modyfikuj przepływ:

Algorytm Forda-Fulkersona

4. Modyfikuj przepływ:
   - jeśli t ma cechę $(z^+, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(zt) = f(zt) + \epsilon(t)$ i idź do z,

Algorytm Forda-Fulkersona

4. Modyfikuj przepływ:
   - jeśli t ma cechę $(z^+, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(zt) = f(zt) + \epsilon(t)$ i idź do z,
   - jeśli t ma cechę $(z^-, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(tz) = f(tz) - \epsilon(t)$ i idź do z.

Algorytm Forda-Fulkersona

4. Modyfikuj przepływ:
   - jeśli t ma cechę $(z^+, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(zt) = f(zt) + \epsilon(t)$ i idź do z,
   - jeśli t ma cechę $(z^-, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(tz) = f(tz) - \epsilon(t)$ i idź do z.
   - jeśli z ma cechę $(x^+, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(xz) = f(xz) + \epsilon(t)$ i idź do x,

Algorytm Forda-Fulkersona

4. Modyfikuj przepływ:
   - jeśli t ma cechę $(z^+, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(zt) = f(zt) + \epsilon(t)$ i idź do z,
   - jeśli t ma cechę $(z^-, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(tz) = f(tz) - \epsilon(t)$ i idź do z.
   - jeśli z ma cechę $(x^+, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(xz) = f(xz) + \epsilon(t)$ i idź do x,
   - jeśli z ma cechę $(y^-, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(zy) = f(zy) - \epsilon(t)$ i idź do y.

Algorytm Forda-Fulkersona

4. Modyfikuj przepływ:
   - jeśli t ma cechę $(z^+, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(zt) = f(zt) + \epsilon(t)$ i idź do z,
   - jeśli t ma cechę $(z^-, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(tz) = f(tz) - \epsilon(t)$ i idź do z.
   - jeśli z ma cechę $(x^+, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(xz) = f(xz) + \epsilon(t)$ i idź do x,
   - jeśli z ma cechę $(y^-, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(zy) = f(zy) - \epsilon(t)$ i idź do y.

4. Idź do 1.

Algorytm Forda-Fulkersona

4. Modyfikuj przepływ:
   - jeśli t ma cechę $(z^+, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(zt) = f(zt) + \epsilon(t)$ i idź do z,
   - jeśli t ma cechę $(z^-, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(tz) = f(tz) - \epsilon(t)$ i idź do z.
   - jeśli z ma cechę $(x^+, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(xz) = f(xz) + \epsilon(t)$ i idź do x,
   - jeśli z ma cechę $(y^-, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(zy) = f(zy) - \epsilon(t)$ i idź do y.
4. Idź do 1.

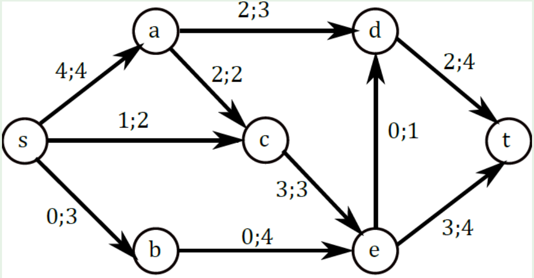
Wartość maksymalnego przepływu: sumujemy przepływy wychodzące ze źródła s.

Algorytm Forda-Fulkersona

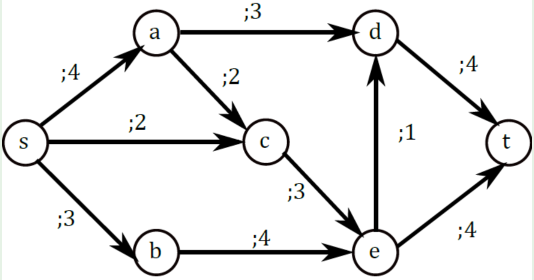
4. Modyfikuj przepływ:
   - jeśli t ma cechę $(z^+, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(zt) = f(zt) + \epsilon(t)$ i idź do z,
   - jeśli t ma cechę $(z^-, \epsilon(t))$, to $\tilde{f}(tz) = f(tz) - \epsilon(t)$ i idź do z.
   - jeśli z ma cechę $(x^+, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(xz) = f(xz) + \epsilon(t)$ i idź do x,
   - jeśli z ma cechę $(y^-, \epsilon(z))$, to $\tilde{f}(zy) = f(zy) - \epsilon(t)$ i idź do y.
4. Idź do 1.

Wartość maksymalnego przepływu: sumujemy przepływy wychodzące ze źródła s. Minimalny przekrój: S - wierzchołki ocechowane w ostatnim kroku, T - wierzchołki nieocechowane w ostatnim kroku

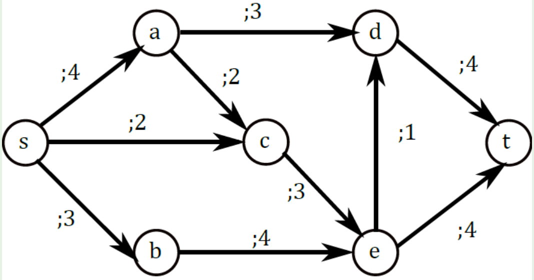
Przykład



Przykład



Przykład



Przykład