Kolokwium 1

Algebra liniowa

4 grudnia 2020

Zadanie 1 (4p+6p)**.** Wykorzystując odpowiednią postać liczby zespolonej oraz adekwatne twierdzenia, znajdź wszystkie rozwiązania następujących równań w ciele liczb zespolonych. Odpowiedzi podaj w postaci algebraicznej.

(a) $z^4 = (2+i)^{12}$,

(b) $z^4 + 2z^3 - 9z^2 - 10z + 50 = 0$, wiedząc że $z_0 = 2 - i$ jest pierwiastkiem wielomianu: $w(z) = z^4 + 2z^3 - 9z^2 - 10z + 50$.

Zadanie 2 (5p+6p)**.** Dla ustalonej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiujemy relację $R = (\mathbb{R}, \mathrm{gr}R, \mathbb{R})$ jako:

$$xRy \iff f(x) \leqslant f(y).$$

(a) Udowodnij, że R jest relacją porządku wtedy i tylko wtedy, gdy f jest iniekcją.

(b) Niech:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in (0,1), \\ e^x, & x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty). \end{cases}$$

Wyznacz, o ile istnieją, kresy dolne oraz górne zbiorów $(-1,1)$ oraz $[-1,1]$. Czy te zbiory stanowią łańcuchy? Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie 3 (11p+3p)**.** Niech $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ będzie zbiorem wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych z dodawaniem i mnożeniem wielomianów.

(a) Wiedząc, że $(\mathbb{R}[x], +)$ jest grupą, udowodnij, że $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ jest pierścieniem całkowitym, ale nie jest ciałem.

(b) Czy funkcja $h : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ określona wzorem $h(p) = p(4)$ jest homomorfizmem pierścieni $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ oraz $(\mathbb{R}, +, \cdot)$?

Zadanie 4 (15p)**.** Zbadaj, czy podany zbiór stanowi podprzestrzeń liniową przestrzeni wektorowej V. Jeżeli tak, wyznacz bazę i wymiar tej podprzestrzeni.

(a) $U_1 = \{w \in R[x] \colon \text{stopień } w \geqslant 3\}$; $V = R[x]$,

(b) $U_2 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \big(f(-1) + f(1)\big)f(0) = 0\}$; $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(c) $U_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$; $V = \mathbb{R}^3$

(d) $U_4 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \colon \operatorname{Re} z_1 = 0 \wedge \operatorname{Im} z_2 = 0\}$; $V = \mathbb{C}^3(\mathbb{C})$

(e) $U_5 = W_1 \cup W_2$, gdzie $W_1 = \mathrm{Lin}\{\sin^2 x\}$, $W_2 = \mathrm{Lin}\{\cos^2 x\}$; $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$