Kolokwium 1b

Algebra

3 grudnia 2021

Zadanie 1 (4p+5p)**.** Wykorzystując odpowiednią postać liczby zespolonej oraz adekwatne twierdzenia, znajdź wszystkie rozwiązania następujących równań w ciele liczb zespolonych.

(a) $(\overline{z})^3 \cdot z = -(\sqrt{3} + i)|z|$,

(b) $z^4 - 2z^3 + 9z^2 - 8z + 20 = 0$, wiedząc że $z_0 = 1 - 2i$ jest pierwiastkiem wielomianu: $w(z) = z^4 - 2z^3 + 9z^2 - 8z + 20$.

Zadanie 2 (5p+5p)**.** Niech A będzie zbiorem wszystkich ciągów binarnych długości co najwyżej n. W zbiorze A definiujemy relację $R = (A, grR, A)$ jako: $xRy \iff \exists z \in A : xz = y$, gdzie przez xz rozumiemy ciąg powstały przez sklejenie (konkatenację) ciągów x i z.

(a) Czy R jest relacją porządku czy równoważności? Udowodnij.

(b) Jeżeli R jest relacją porządku, to znajdź elementy maksymalne, minimalne, największe i najmniejsze zbioru A (o ile istnieją). Jeżeli R jest relacją równoważności, to wyznacz jej zbiór ilorazowy.

Zadanie 3 (11p+3p)**.** W zbiorze $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ określamy działanie $\star$ w następujący sposób: $(a_1, b_1) \star (a_2, b_2) = (b_1 a_2 + a_1, b_1 b_2)$.

(a) Udowodnij, że $(E, \star)$ jest grupą nieprzemienną.

(b) Niech $f : E \to \mathbb{R}_+$ będzie odwzorowaniem takim, że: $f(a, b) = b$. Sprawdź, czy f jest homomorfizmem grup $(E, \star)$ oraz $(\mathbb{R}_+, \cdot)$.

Zadanie 4 (17p)**.** Zbadaj, czy podany zbiór stanowi podprzestrzeń liniową przestrzeni wektorowej V. Jeżeli tak, wyznacz bazę i wymiar tej podprzestrzeni.

(a) $U_1 = \{p \in R[x]_2 \colon p'(-1) + p(1) = p''(0)\}$; $V = R[x]_2$,

(b) $U_2 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f$ nie jest surjekcją$\}$; $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(c) $U_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - 2x_2 + x_2 x_3 = 0\}$; $V = \mathbb{R}^3$

(d) $U_4 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leqslant 1\}$; $V = \mathbb{C}(\mathbb{R})$