

Kolokwium 1a

Algebra

30 listopada 2022

Zadanie 1 (4p+6p). Wykorzystując odpowiednią postać liczby zespolonej oraz adekwatne twierdzenia, znajdź wszystkie rozwiązania następujących równań w ciele liczb zespolonych.

- (a) $(\bar{z})^2 + (3 - 2i)\bar{z} - \frac{1}{4} + 2i = 0$,
- (b) $z^6 - 8z^5 + 27z^4 - 48z^3 + 51z^2 - 40z + 25 = 0$, wiedząc że $z_0 = 2 - i$ jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu:
 $w(z) = z^6 - 8z^5 + 27z^4 - 48z^3 + 51z^2 - 40z + 25$.

Zadanie 2 (5p+4p). W zbiorze liczb naturalnych dodatnich określamy relację $R = (\mathbb{N}_+, \text{gr}R, \mathbb{N}_+)$ jako: $xRy \iff$ istnieją liczby naturalne k, l takie, że $x^k = y^l$.

- (a) Czy R jest relacją porządku czy równoważności? Udowodnij.
- (b) Jeżeli R jest relacją porządku, to wskaż, o ile istnieją, kresy zbioru $\{8, 9, 10, 15\}$. Jeżeli R jest relacją równoważności, to wyznacz liczebności wszystkich klas równoważności i określ, które spośród liczb $1, 2, \dots, 20$ są najmniejsze w swojej klasie równoważności.

Zadanie 3 (11p+3p). W zbiorze liczb rzeczywistych określamy działanie \oplus w następujący sposób: $a \oplus b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$.

- (a) Udowodnij, że $(\mathbb{R}, \oplus, \cdot)$, gdzie \cdot to zwykle mnożenie liczb rzeczywistych, jest ciałem.
- (b) Czy gdyby wymienić działanie \oplus na: $a \boxplus b = \sqrt{a^2 + b^2}$, to ta struktura również byłaby ciałem?
- (c) Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem takim, że: $f(x) = x^3$. Sprawdź, czy f jest homomorfizmem grup (\mathbb{R}, \oplus) oraz $(\mathbb{R}, +)$.

Zadanie 4 (17p). Zbadaj, które z poniższych zdań są prawdziwe. Podaj odpowiedź i ją uzasadnij.

- (a) Zbiór $A = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ ma miejsce zerowe w przedziale } [0, 1]\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (b) Istnieje baza przestrzeni \mathbb{R}^2 , w której wektory $(6, 1)$ i $(9, 4)$ mają współrzędne odpowiednio $[8, -11]$ i $[7, -9]$.
- (c) Zbiór $\{(1, 1, 2, 1), (3, 5, 2, 4), (1, -5, 6, -3)\}$ jest bazą przestrzeni wektorowej $\text{Lin}\{(1, 1, 2, 1), (3, 5, 2, 4), (1, -5, 6, -3)\}$.