Kolokwium 1b

Algebra

30 listopada 2022

Zadanie 1 (4p+5p)**.** Wykorzystując odpowiednią postać liczby zespolonej oraz adekwatne twierdzenia, znajdź wszystkie rozwiązania następujących równań w ciele liczb zespolonych.

(a) $z^3 = (2+4i)^6$,

(b) $z^6 - 4z^5 + 15z^4 - 24z^3 + 39z^2 - 20z + 25 = 0$, wiedząc że $z_0 = 1 - 2i$ jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu:
$w(z) = z^6 - 4z^5 + 15z^4 - 24z^3 + 39z^2 - 20z + 25$.

Zadanie 2 (5p+5p)**.** Niech $\mathbb{R}[x]$ będzie zbiorem wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych. Definiujemy relację $R = (\mathbb{R}[x], \mathrm{gr}R, \mathbb{R}[x])$ jako: $pRq \iff p = q$ lub q jest k-tą pochodną p dla pewnego $k \geqslant 1$.

(a) Czy R jest relacją porządku czy równoważności? Udowodnij.

(b) Jeżeli R jest relacją porządku, to znajdź elementy maksymalne, minimalne, największe i najmniejsze zbioru $\mathbb{R}[x]_1$ (o ile istnieją). Jeżeli R jest relacją równoważności, to wyznacz jej zbiór ilorazowy.

Zadanie 3 (11p+3p)**.** W zbiorze liczb rzeczywistych określamy działanie $\oplus$ w następujący sposób: $a \oplus b = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)^3$.

(a) Udowodnij, że $(\mathbb{R}, \oplus, \cdot)$, gdzie $\cdot$ to zwykłe mnożenie liczb rzeczywistych, jest ciałem.

(b) Czy gdyby wymienić działanie $\oplus$ na: $a \boxplus b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$, to ta struktura również byłaby ciałem?

(c) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem takim, że: $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Sprawdź, czy f jest homomorfizmem grup $(\mathbb{R}, \oplus)$ oraz $(\mathbb{R}, +)$.

Zadanie 4 (17p)**.** Zbadaj, które z poniższych zdań są prawdziwe. Podaj odpowiedź i ją uzasadnij.

(a) Zbiór $A = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f$ ma miejsce zerowe w przedziale $[-1, 1]\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Istnieje baza przestrzeni R^2, w której wektory $(7, 1)$ i $(10, 2)$ mają współrzędne odpowiednio $[7, -4]$ i $[9, -5]$.

(c) Zbiór $\{(5, 2, 4, 1), (1, 0, 1, -1), (3, 4, 1, 9)\}$ jest bazą przestrzeni wektorowej $\mathrm{Lin}\{(5, 2, 4, 1), (1, 0, 1, -1), (3, 4, 1, 9)\}$.