Kolokwium 1a

Algebra

15 grudnia 2023

Zadanie 1 (5p+3p)**.**

(a) Rozwiąż (wynik podaj w postaci algebraicznej) w ciele liczb zespolonych równanie: $z^3 - z^2 + 4iz - 4i = 0$.

(b) Zilustruj na płaszczyźnie zespolonej zbiór: $\{z \in \mathbb{C} : |\bar{z} - 2i| = |\bar{z} + 1 + i|\}$.

Zadanie 2 (5p+4p)**.** W zbiorze $\mathbb{R}^3$ dana jest relacja $(\mathbb{R}^3, S, \mathbb{R}^3)$ taka, że dla dowolnych $u, v \in \mathbb{R}^3$:

$$uSv \iff \exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : v = k \cdot u.$$

(a) Czy S jest relacją porządku czy równoważności? Udowodnij.

(b) Jeżeli S jest relacją porządku, to wskaż, o ile istnieją, elementy minimalne i maksymalne kuli o środku w zerze i promieniu równym 1. Jeżeli S jest relacją równoważności, to wyznacz klasę równoważności wektora $(0, 0, 1)$ oraz wskaż (o ile istnieją) wszystkie klasy równoważności o skończonej liczbie elementów.

Zadanie 3 (18p)**.** W zbiorze liczb rzeczywistych określamy działanie $\odot$ w następujący sposób: $x \odot y = xy + 2x + 2y + 2$.

(a) Sprawdź, czy $G_1 = (\mathbb{R}, \odot)$ jest grupą abelową.

(b) Sprawdź, czy $G_2 = (\mathbb{R} \setminus \{-2\}, \odot)$ jest grupą abelową.

(c) Niech f będzie odwzorowaniem takim, że: $f(x) = x+1$. Sprawdź, czy f jest homomorfizmem z grupy $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ w tę ze struktur G_1, G_2, która jest grupą.

Zadanie 4 (15p)**.** Dany jest podzbiór $A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(1) + p'(-1) = p'(0)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$.

(a) Udowodnij, że A jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$.

(b) Znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni A.

(c) Czy podzbiór $C = \{p \in A : p'(1) = p'(0) + 1\}$ stanowi podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$? Odpowiedź uzasadnij.

(d) Czy zbiór $D = \{3x^2 - 2x + 5, -4x^2 + 5x - 9\}$ stanowi bazę podprzestrzeni A? Odpowiedź uzasadnij.

(e) Udowodnij, że jeśli V jest przestrzenią wektorową i $V \neq \{\mathbf{0}\}$, to $V + V = V$, ale nie jest to suma prosta.