Zestaw 0 - Równania, nierówności, indukcja matematyczna

1. Rozwiąż równanie:

   a) $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$,

   b) $6\cos^2 x - 5\sin x = 2$,

   c) $x^{\log_2(x+2)+\log_2(x+3)} = \frac{1}{x}$.

2. Rozwiąż nierówność:

   a) $\sqrt{x+5} > 7 - x$,

   b) $(\frac{2}{3})^{x^2} > \sqrt{\frac{3}{2}}^x$,

   c) $\log_{\frac{2}{3}}[\sin(2x) + \sin^2(2x) + \ldots] > 0$,

   d) $-2\sin(3x) \geqslant 1$.

3. Zbadaj parzystość:

   a) iloczynu dwóch funkcji nieparzystych,

   b) iloczynu funkcji parzystej i nieparzystej.

4. Udowodnij za pomocą indukcji matematycznej:

   a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$,

   b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 43 | 6^{n+2} + 7^{2n+1}$,

   c) $\forall n \geqslant 4 \quad 3^n > n^3$,

   d) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 41 | 5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n}$,

   e) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$,

   f) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$,

   g) dla każdego $x > -1$ zachodzi nierówność Bernoulliego $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Aleksandra Gorzkowska