Zestaw 2 - Ciągi

1. Dla danego ciągu rekurencyjnego wykaż, że jest zbieżny i znajdź jego granicę:

   a) $a_1 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ dla $n \geqslant 1$,

   b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ dla $n \geqslant 1$.

2. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $(1 + \frac{1}{n})^n < 3$.

3. Udowodnij, że ciąg $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ jest rosnący.

4. Wyznacz granicę dolną i górną ciągu $a_n = 4 \cdot (-1)^n + \cos \frac{n\pi}{4} \cdot$.

5. Oblicz (jeżeli istnieje) granicę ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

   a) $a_n = \frac{(-0{,}8)^n}{2n-5}$,

   b) $a_n = \frac{\sqrt{1+2n^2} - \sqrt{1+4n^2}}{n}$,

   c) $a_n = \sqrt[3]{n^3 + 4n^2} - n$,

   d) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}$,

   e) $a_n = \sqrt[n]{(\frac{2}{3})^n + (\frac{3}{4})^n}$,

   f) $a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$,

   g) $a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$,

   h) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,

   i) $a_n = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+2}\right)^n$,

   j) $a_n = \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$,

   k) $a_n = \frac{(n+1)\cdot\cos(n!)}{n^3+1}$.

Aleksandra Gorzkowska