

Zadania do samodzielnej pracy - Granice i ciągłość funkcji

1. Oblicz (jeżeli istnieją) granice funkcji:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{x - 3},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6},$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^5 + 32},$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^3 + 125}{2x^2 - 50},$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{4x^2 + 9x + 2},$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1},$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x + 5}{-x^3 + 6x^2 - x + 7}.$$

2. Oblicz (jeżeli istnieją) granice funkcji:

$$a) \lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{1 - \sqrt{x + 1}},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 25} - 5},$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x} - 8}{\sqrt[4]{x} - 2},$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x).$$

3. Oblicz (jeżeli istnieją) granice funkcji:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{3 \sin 2x},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}},$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{8 - x}{\sin \frac{1}{8}\pi x},$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x},$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x},$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x},$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x},$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x + 2)}{x^2 + 2x}.$$

4. Oblicz (jeżeli istnieją) granice funkcji:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 4}{3x^3 + x^2 - x - 1},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x},$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 125}{x^2 - 25},$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4},$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \sin(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}),$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 + \sin x},$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x},$$

j) $\lim_{x \rightarrow -1} e^{\frac{1}{x+1}}$, l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$,

5. Oblicz (jeżeli istnieją) granice funkcji:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}}{\sin x - \cos x}$, e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$,

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}$, f) $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$,

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$, g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$,

6. Znaleźć granicę lewostronną i prawostronną funkcji f w punkcie x_0 , gdzie:

a) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^3}}$, $x_0 = 1$, d) $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} + 3}{3^{\frac{1}{x}} + 2}$, $x_0 = 0$,

b) $f(x) = \frac{x}{2x + e^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_0 = 1$, e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|\sin x|}}$, $x_0 = 0$.

c) $f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, $x_0 = 0$,

7. Obliczyć granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0 , a następnie rozstrzygnąć, czy funkcja ma w tym punkcie granicę:

a) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $x_0 = 0$, d) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 1$,

b) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} + x$, $x_0 = 1$, e) $f(x) = x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$,

c) $f(x) = \frac{x}{x-2}$, $x_0 = 2$, f) $f(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{|x - \frac{\pi}{2}|}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

8. Zbadać ciągłość następujących funkcji:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x + 5}, & x \neq -5 \\ -10, & x = -5 \end{cases}$, d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x^2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$,

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, e) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1 \\ |x-1|, & |x| > 1 \end{cases}$,

c) $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, f) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

9. Jaka powinna być wartość funkcji f w punkcie $x = 0$, aby tak zdefiniowana funkcja była ciągła w \mathbb{R} , jeżeli dla $x \neq 0$ funkcja f dana jest wzorem:

$$\text{a) } f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x},$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}.$$

$$\text{b) } f(x) = x \sin \frac{\pi}{x},$$

10. Znaleźć asymptoty (o ile istnieją) następujących funkcji:

$$\text{a) } f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 10x + 3},$$

$$\text{d) } f(x) = x + 2\sqrt{-x},$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3},$$

$$\text{e) } f(x) = x\sqrt{\frac{x}{2-x}},$$

$$\text{c) } f(x) = x - \frac{4}{x^2},$$

$$\text{f) } f(x) = x - 2\arctg x.$$

11. Dobrać $a \in \mathbb{R}$ tak, żeby funkcja $f(x)$ była ciągła na \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases},$$

12. Dobrać $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, żeby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x}, & x < 0 \\ \frac{x}{x^3 - 1}, & 0 \leq x < 1, \\ c, & x = 1, \\ \frac{x^2 + (b-1)x - b}{x-1}, & x > 1, \end{cases},$$

była ciągła na \mathbb{R} .