## Zadania do samodzielnej pracy - Różniczkowalność funkcji

1. Oblicz pochodne następujących funkcji:

a) $f(x) = 2\sqrt[3]{x} - \frac{4}{x^4}$,

b) $f(x) = \frac{5x^2+x-2}{x^2+7}$,

c) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1-x}}$,

d) $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$,

e) $f(x) = e^{\sin x}$,

f) $f(x) = \sqrt{\ln x} + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$,

g) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1-\cos x}}$,

h) $f(x) = \arccos\sqrt{1-x^2}$,

i) $f(t) = \frac{t}{1-\cos t}$,

j) $f(u) = \frac{u}{4^u}$,

k) $f(x) = x \cdot 8^{x^2}$,

l) $f(t) = \frac{e^t}{1+t^2}$.

2. Oblicz pochodne następujących funkcji:

a) $f(x) = (\sqrt{x}+1)(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1)$,

b) $f(t) = (\sqrt[3]{t} + 2t)(1 + \sqrt[3]{t^2} + 3t)$,

c) $f(u) = \frac{2}{u^3-1}$,

d) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^4-t^8}}$,

e) $f(u) = 3\sin(3u+5)$,

f) $f(x) = \cos^2 x$,

g) $f(t) = 3\sin^2 t - \sin^3 t$,

h) $f(u) = \cos^3 4u$,

i) $f(x) = \sin(3\cos x)\cdot\cos(5\sin^3 7x)$,

j) $f(x) = \operatorname{tg}^4(2x)$ ,

k) $f(x) = \sin\sqrt{1+x^2}$,

l) $f(t) = \sin(\arcsin t)$,

m) $f(u) = \arcsin\frac{2}{u}$,

n) $g(t) = \operatorname{arctg}^2\frac{1}{t}$,

o) $g(x) = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1+x^2})$,

p) $h(u) = \sqrt{\ln u}$,

q) $f(x) = \ln\sin x$,

r) $g(t) = \log_3 t$,

s) $f(u) = \log_5(u^2-1)$,

t) $h(x) = \ln\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$,

u) $g(t) = 10^t$,

v) $f(u) = e^{\sqrt{u^2+1}}$,

w) $f(u) = 3^{\sin u}$.

3. Oblicz pochodne następujących funkcji:

a) $f(x) = x^{\sin x}$,

b) $f(x) = \sin(x^{\cos x})$,

c) $f(x) = \log_x 5$,

d) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$,

e) $f(x) = x^{x^{x^x}}$,

f) $f(x) = (x^x)^{(x^x)}$,

g) $f(x) = \sqrt[x]{x}$,

h) $f(x) = (\sin x)^x$,

i) $f(x) = 2^{(\ln x)^x}$.

4. Oblicz (jeżeli istnieje) $f'(x_0)$ w podanym punkcie $x_0$:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x^2+3x+1, & \text{gdy } x \leqslant 1, \\ x^2-3x+4, & \text{gdy } x > 1, \end{cases}$ , $x_0 = 1$,

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & \text{gdy } x \leqslant 2, \\ x^2 - 7x + 8, & \text{gdy } x > 2, \end{cases}$, $x_0 = 2$,

c) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x > 0, \\ x(x+1)^2, & \text{gdy } x \leqslant 0, \end{cases}$, $x_0 = 0$,

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 4, & \text{gdy } x < 3, \\ x^2 - 3x + 4, & \text{gdy } x \geqslant 3, \end{cases}$, $x_0 = 3$.

5. Zbadaj różniczkowalność w całej dziedzinie następujących funkcji. Czy $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$?

a) $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2(x-4), & \text{gdy } x \in (3,4), \\ 0, & \text{gdy } x \notin (3,4), \end{cases}$,

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \end{cases}$,

c) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant 0 \\ x - x^2, & 0 < x < 1 \\ \ln x, & x \geqslant 1 \end{cases}$,

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

6. Dla jakich parametrów funkcja $f$ jest ciągła i różniczkowalna w swojej dziedzinie:

a) $h(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla} \quad x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$,

b) $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla} \quad x \leqslant 0 \\ cx^2 + dx & \text{dla} \quad x \in (0;1] \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$,

c) $g(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla} \quad x \leqslant 1 \\ ax^2 + c & \text{dla} \quad 1 < x \leqslant 2 \\ \frac{dx^2+1}{x} & \text{dla} \quad x > 2 \end{cases}$.