Zestaw 5 - Zastosowania rachunku różniczkowego, cz.1

1. Oblicz granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x-\mathrm{tg}x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi - 2\mathrm{arctg}x)\ln x$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\mathrm{ctg}x-1}{x^2}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$,

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}-x\right]$.

2. Sprawdź, czy dane funkcje spełniają założenia twierdzenia Rolle'a na przedziale $[-1,1]$. Jeśli tak, to znajdź punkt realizujący tezę tego twierdzenia.

a) $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{\pi}{x}, & \text{gdy } x\neq 0,\\ 0, & \text{gdy } x=0,\end{cases}$,

b) $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\mathrm{arctg}|x|$.

3. Zastosuj twierdzenie Lagrange'a do funkcji $f(x)$. Znajdź punkt z tezy tego twierdzenia.

$$f(x)=\arcsin x, x\in[-1,1].$$

4. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a udowodnij nierówność

$$x>\ln(1+x), \text{ dla } x>0.$$

5. Udowodnij równość $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x\in[0,+\infty)$.

Aleksandra Gorzkowska