Zestaw 5 - Zastosowania rachunku różniczkowego, cz. I

1. Oblicz granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln x$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$,

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{e^{x^2}}$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$,

h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$,

i) $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(1+x)]^x$,

j) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$,

k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{tg}x-1}{2\sin^2 x-1}$,

l) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x$,

m) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$,

n) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x}$,

o) $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x\ln(x-1)$.

2. Sprawdź, czy podane funkcje spełniają założenia twierdzenia Rolle'a na przedziale $[-1,1]$. Jeśli tak, to znajdź punkt realizujący tezę tego twierdzenia.

a) $f(x)=x(x^2-1)$, b) $f(x)=\sin\pi x$, c) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$.

3. Zastosuj twierdzenie Lagrange'a do podanych funkcji. Podaj odpowiednie punkty pośrednie.

a) $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[1,4]$,

b) $f(x)=|\sin x|$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,

c) $f(x)=\mathrm{arctg}x$, $x\in[-1,\sqrt{3}]$.

4. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a udowodnij nierówności:

a) $|\sin^{10}x-\sin^{10}y|\leqslant 10|x-y|$, dla $x,y\in\mathbb{R}$,

b) $\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\leqslant \mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta\leqslant\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$, dla $0<\beta\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

5. Udowodnij równości:

a) $\mathrm{arctg}x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

b) $\mathrm{arctg}x=\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$, , $x\in(-1,1)$,

c) $\mathrm{arctg}x+\mathrm{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{\pi}{4}$, dla $x\in(-1,+\infty)$,

d) $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$, dla $|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$.

6. Udowodnij nierówności:

   a) $\ln x < \sqrt{x}$, dla $x > 0$,

   b) $\ln(1 + \sqrt{1+x^2}) < \dfrac{1}{x} + \ln x$, dla $x > 0$,

   c) $\dfrac{\ln x}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ dla $x > 0,\ x \neq 1$,

   d) $\dfrac{2}{2x+1} < \ln(1 + \dfrac{1}{x}) < \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$, dla $x > 0$.

7. Zbadaj istnienie ekstremów lokalnych oraz podaj przedziały monotoniczności dla funkcji określonych wzorami:

   (a) $f(x = 4x^2 - 10x + 5\arctan(2x))$,
   (b) $f(x) = x^{x^2}$,
   (c) $f(x) = 3\cos(2x) + \cos^2 x + 4x$,
   (d) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$,
   (e) $f(x) = x^2 e^{\frac{-x^2}{2}}$,
   (f) $f(x) = (x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$,
   (g) $f(x) = (x+1)^3\sqrt[3]{2x^2 - x^3}$
   (h) $f(x) = |x^2 - 1|$,
   (i) $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + 2x - 5$,
   (j) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$,
   (k) $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$,
   (l) $f(x) = (x^2 - 2x)\ln x - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$.

8. Znajdź najmniejsze i największe wartości funkcji:

   (a) $f(x) = 1 - |9 - x^2|$, na przedziale $[-5; 1]$,
   (b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, na przedziale $[0; 2]$,
   (c) $f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, na przedziale $[0; 1]$,
   (d) $f(x) = |x^2 - 6x - 7|$, na przedziale $[0; 9]$,
   (e) $f(x) = x^{-x}$, na przedziale $(0; +\infty)$.

9. Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji:

   (a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 10x + 3}$,
   (b) $f(x) = x - \dfrac{4}{x^2}$,
   (c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$,
   (d) $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$,
   (e) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$,
   (f) $f(x) = x - 2\arctan x$,
   (g) $f(x) = x\arctan x$,
   (h) $f(x) = x\ln\left(\dfrac{1}{x} + e\right)$,
   (i) $f(x) = x\ln\left(\dfrac{2x}{x-2}\right)$,
   (j) $f(x) = \dfrac{x}{x + 2\sqrt{x^2-1}}$.

10. Zbadaj przebieg zmienności zadanych funkcji i narysuj ich wykresy:

(a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$,

(b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x\sqrt{x}}$,

(c) $f(x) = |x|e^{-x^2}$,

(d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$,

(e) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}e^{-\frac{x^2}{3}}$,

(f) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 - x}$,

(g) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$,

(h) $f(x) = \sqrt[3]{-x^3 + 3x + 2}$,

(i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$,

(j) $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}}$,

(k) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x^2}}$,

(l) $f(x) = 2\sqrt{2} - \ln x$.