

**Zestaw 6 - Zastosowania rachunku różniczkowego:
przebieg zmienności funkcji, optymalizacja, wzór Taylora**

1. Zbadaj istnienie ekstremów lokalnych oraz podaj przedziały monotoniczności dla funkcji $f(x) = (x - 5)^2 \sqrt[3]{(x + 1)^2}$.
2. Zbadaj przebieg zmienności i naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$.
3. Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu wpisanego w elipsę $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
4. Napisz wzór Taylora z resztą w postaci Lagrange'a dla funkcji $f(x) = \frac{x}{x + 1}$, punktu $x_0 = 2$ oraz $n = 3$.
5. Wyprowadź wzór Maclaurina dla funkcji $f(x) = e^x$.
 - a) Pokaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$,
 - b) Czy dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$?
6. Oszacuj dokładność wzoru przybliżonego $\sqrt[3]{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{3}$ dla $|x| \leq 0,1$.
7. Dla jakich x wielomian $w(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ przybliży wartość funkcji $f(x) = \cos x$ z dokładnością do 0,01?
8. Oblicz $\ln(1,1)$ z dokładnością do 10^{-3} .