

Zestaw 7 - Podstawowe metody całkowania

1. Obliczyć następujące całki nieoznaczone (korzystając z metody całkowania przez podstawienie):

1) $\int x e^{-x^2} dx,$

2) $\int x \sqrt{a^2 - x^2} dx,$

3) $\int e^{\sqrt{x}} dx,$

4) $\int \operatorname{ctg} x dx,$

5) $\int \operatorname{tg} x dx,$

6) $\int \frac{1}{x \ln x} dx,$

7) $\int \frac{3x + 5}{x^2 + 1} dx,$

8) $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx,$

9) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x + 3}}{\cos^2 x} dx,$

10) $\int \frac{x}{\sqrt[4]{2x^2 + 7}} dx,$

11) $\int \frac{1 + \sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx,$

12) $\int \frac{x^3}{1 + x^8} dx,$

13) $\int \frac{5x}{\sqrt{1 + x^4}} dx,$

14) $\int x(2x^2 + 3)^n dx, n \in \mathbb{N},$

15) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx,$

16) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx,$

17) $\int \frac{\cos x}{1 + 4 \sin^2 x} dx,$

18) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx,$

19) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx,$

20) $\int \sin^3 x \cos x dx,$

21) $\int \frac{\sqrt{5 \ln x + 7}}{x} dx,$

22) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{5 + 3 \sin x}} dx,$

23) $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln(\sin x)} dx,$

24) $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x \ln x} dx,$

25) $\int \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} dx,$

26) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx,$

27) $\int \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}} dx,$

28) $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx,$

29) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx,$

30) $\int \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$

2. Obliczyć następujące całki nieoznaczone (korzystając z metody całkowania przez części):

1) $\int x \sin x dx,$

4) $\int x \operatorname{arctg} x dx,$

2) $\int x e^{-x} dx,$

5) $\int \arccos x dx,$

3) $\int x 3^x dx,$

6) $\int \arcsin x dx,$

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 7) $\int x \operatorname{tg}^2 x dx,$ | 17) $\int \cos \ln x dx,$ |
| 8) $\int x \cos^2 x dx,$ | 18) $\int \sqrt{k + x^2} dx,$ |
| 9) $\int x \ln(x^2 + 1) dx,$ | 19) $\int x^2 e^x \sin x dx,$ |
| 10) $\int x^3 e^x dx,$ | 20) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx,$ |
| 11) $\int x^3 \sin x dx,$ | 21) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx,$ |
| 12) $\int x^2 \cos^2 x dx,$ | 22) $\int x^2 \cos 4x dx,$ |
| 13) $\int \ln x dx,$ | 23) $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} dx,$ |
| 14) $\int \ln^2 x dx,$ | 24) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx,$ |
| 15) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx,$ | 25) $\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1 + x^2)^3}} dx.$ |
| 16) $\int (\arcsin x)^2 dx,$ | |

3. Obliczyć całki z funkcji wymiernych:

- | | |
|--|---|
| 1) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx,$ | 7) $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx,$ |
| 2) $\int \frac{1}{6x^3 - 7x^2 - 3x} dx,$ | 8) $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x - 2)^4} dx,$ |
| 3) $\int \frac{x}{x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30} dx,$ | 9) $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx,$ |
| 4) $\int \frac{x^8 - 2x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x} dx,$ | 10) $\int \frac{x - 1}{2x^4 + 13x^2 + 6} dx,$ |
| 5) $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - 5x^2 + 4} dx,$ | 11) $\int \frac{2x}{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1} dx.$ |
| 6) $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx,$ | |

4. Obliczyć następujące całki nieoznaczone funkcji niewymiernych:

- | | |
|---|---|
| 1) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 4x - 4}} dx,$ | 6) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} dx,$ |
| 2) $\int \frac{1}{x\sqrt{2 + x - x^2}} dx,$ | 7) $\int \frac{3x^3 - 8x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x - 7}} dx,$ |
| 3) $\int \frac{1}{(2x - 3)\sqrt{4x - x^2}} dx,$ | 8) $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx,$ |
| 4) $\int \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}} dx,$ | 9) $\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{2 + x^2} dx,$ |
| 5) $\int \frac{1}{x^2(x + \sqrt{1 + x^2})} dx,$ | |

10) $\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}} dx,$

11) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x^2} dx$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-2x^2}},$

13) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2x^2+3}} dx,$

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-x}}.$

5. Obliczyć następujące całki nieoznaczone funkcji trygonometrycznych:

1) $\frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x},$

2) $\int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx,$

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - \cos^2 x},$

4) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx,$

5) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx,$

6) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x},$

7) $\int \frac{dx}{\sin x},$

8) $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} dx.$