

Zestaw 8 - Całka Newtona i Riemanna; całki niewłaściwe

1. Oblicz następujące całki oznaczone:

a) $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx,$

b) $\int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{e^x - 1} dx.$

2. Korzystając z definicji całki Riemanna oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$.

3. Wyznacz funkcję $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, jeśli:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} x^{-2} & , x < 0 \\ \frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x + 2 \cos x + 7}} & , x \geq 0 \end{cases}$$

Czy funkcja $\Phi(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$?

4. Oblicz całki niewłaściwe:

a) $\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx,$

b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

5. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3 + 1} dx.$

6. Dana jest funkcja $f(x) = e^{x^2}$.

a) Udowodnij, że dla każdego $x \geq 0$ zachodzi nierówność $f(x) \geq 1 + x^2$,

b) Zbadaj zbieżność całki $\int_0^{\infty} \frac{1}{f(x)} dx.$